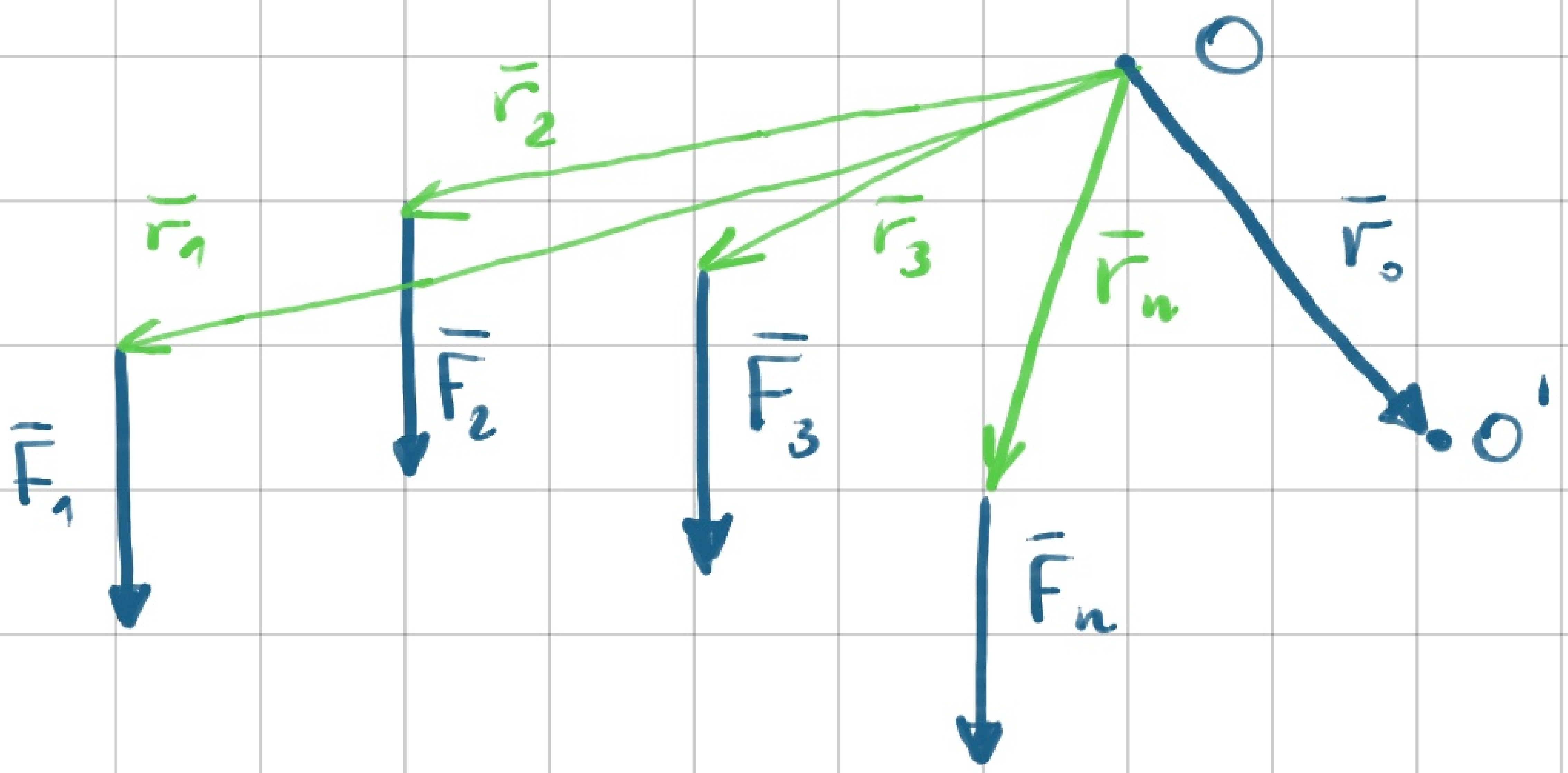
ŚRODKI CIĘŻKOŚCI

Środek ciężkości możemy omówić wskazując jak wyznacza się środek układu sił równoległych.

Jeśli wyobrazimy sobie układ sił równoległych i dowolny biegun O



$$(\bar{r}_0 + r_i') = r_i \Rightarrow r_i' = r_i - r_0$$

to możemy wyznaczyć moment tych wektorów względem bieguna

$$\bar{M}^O = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times \bar{F}_i)$$

Zmiana bieguna jest oczywiście możliwe i wtedy

$$\bar{M}^{O'} = \bar{M}^O + \sum_{i=1}^{n} (-\bar{r}_0 \times \bar{F}_i)$$

Można wykazać, że:

$$\bar{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

Wektor $\bar{r}_0$ będzie wyznaczał środek układu wektorów równoległych. Po rozpisaniu $\bar{r}_0$ i $\bar{r}_i$ w postaci analitycznej

$$\bar{r}_0 = x_0 \bar{i} + y_0 \bar{j} + z_0 \bar{k}$$

$$\bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k}$$

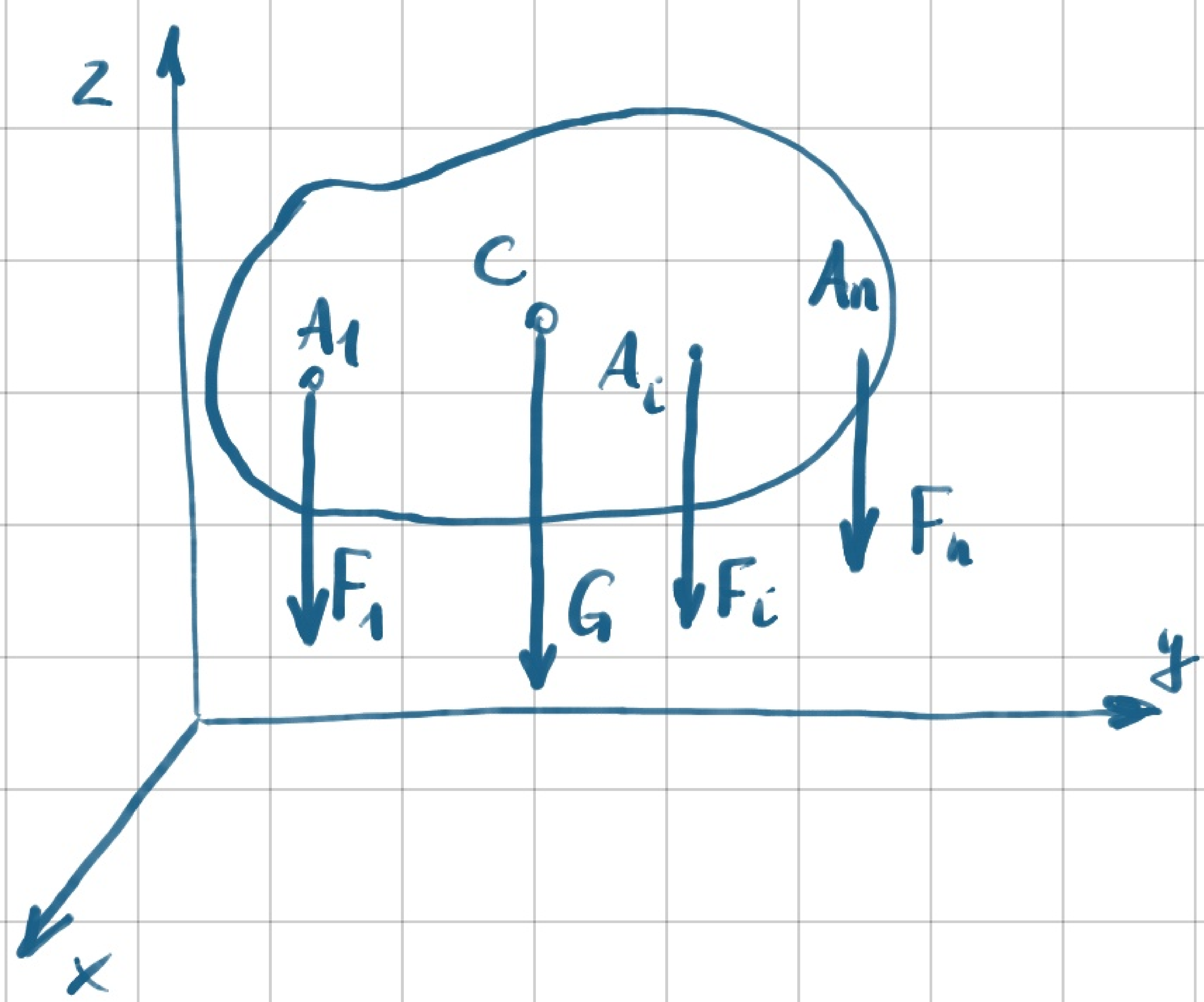
możemy opisać współrzędne środka układu wektorów równoległych

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \qquad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i}$$

Mówiąc o środku ciężkości myślimy o układzie równoległych sił ciężkości skierowanych pionowo do środka Ziemi. W uproszczeniu i w odniesieniu do wymiarów Ziemi możemy siły te traktować jako faktycznie równoległe.

Ciężar ciała możemy potraktować jako siłę wypadkową sił ciężkości pochodzących od punktów tego ciała, która przyłożona jest w środku ciężkości i nie zależy od położenia ciała.



C - środek ciężkości

G - ciężar ciała

Jeśli przyjmiemy, że pole grawitacyjne jest jednorodne i przyspieszenie ziemskie jest stałe, to możemy zdefiniować ciężar jako: $G = mg$

wprowadzimy ciężar właściwy: $\gamma = \rho \cdot g$

ρ - gęstość ciała
g - przyspieszenie ziemskie

współrzędne środka ciężkości zapiszemy wówczas:

$$x_c = \frac{\int_V \rho x \, dV}{m}$$

$$z_c = \frac{\int_V \rho z \, dV}{m}$$

$$y_c = \frac{\int_V \rho y \, dV}{m}$$

m - całkowita masa ciała

$$m = \int_V \rho \, dV$$

Współrzędne środka ciężkości zależą od kształtu ciała i rozkładu masy.

Dla bryt jednorodnych ($\gamma = const$) możemy zapisać:

$$x_c = \frac{\int_V x\,dV}{\int_V dV} = \frac{\int_V x\,dV}{V}$$

$$y_c = \frac{\int_V y\,dV}{V}$$

V - całkowita objętość ciała

$$z_c = \frac{\int_V z\,dV}{V}$$

Dla ciał jednorodnych położenie środka ciężkości zależy tylko od geometrii ciała, stąd środek ciężkości takiego ciała nazywamy ŚRODKIEM CIĘŻKOŚCI BRYŁY GEOMETRYCZNEJ.

Wielkości $\int_V x\,dV$, $\int_V y\,dV$ i $\int_V z\,dV$

nazywamy MOMENTAMI STATYCZNYMI.
Wymiarem jest m^4.

MOMENTY STATYCZNE

$$x_c = \frac{S_{YZ}}{V}$$

S_{YZ} - moment statyczny względem płaszczyzny YZ

$$y_c = \frac{S_{XZ}}{V}$$

$$z_c = \frac{S_{XY}}{V}$$

Do wyznaczenie środków ciężkości brył stosujemy METODĘ MOMENTÓW STATYCZNYCH.

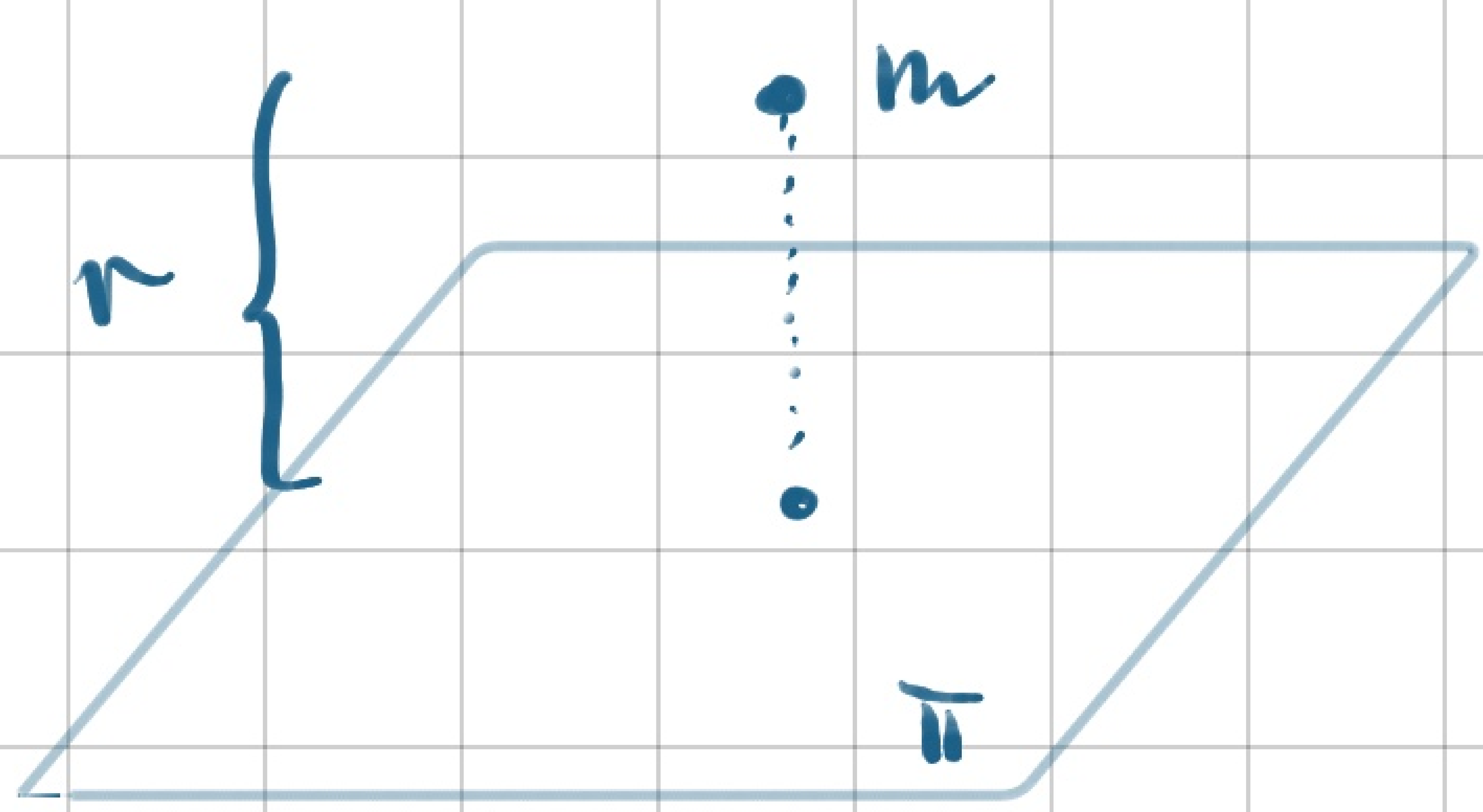
- dzielimy bryłę złożoną na bryły proste o znanym środku ciężkości
- obliczamy momenty statyczne bryły względem przyjętego układu współrzędnych
-

POŁOŻENIE ŚRODKA CIĘŻKOŚCI A SYMETRIA

1. Jeżeli bryła ma płaszczyznę symetrii, to środek ciężkości leży na tej płaszczyźnie
2. Jeżeli bryła ma dwie płaszczyzny symetrii, to jej środek ciężkości leży na linii ich przecięcie
3. Jeżeli bryła ma trzy płaszczyzny, to jej środek ciężkość

Możliwe jest również stosowanie tzw. metody mas ujemnych. Figurę złożoną sprowadza się poprzez dokładanie figur prostych do możliwie prostej figury. Następnie wyznacza się moment statyczny odejmując momenty statyczne dołożonych figur prostych.

MOMENTY STATYCZNE WZGLĘDEM PŁASZCZYZNY



$$S = m \cdot r$$

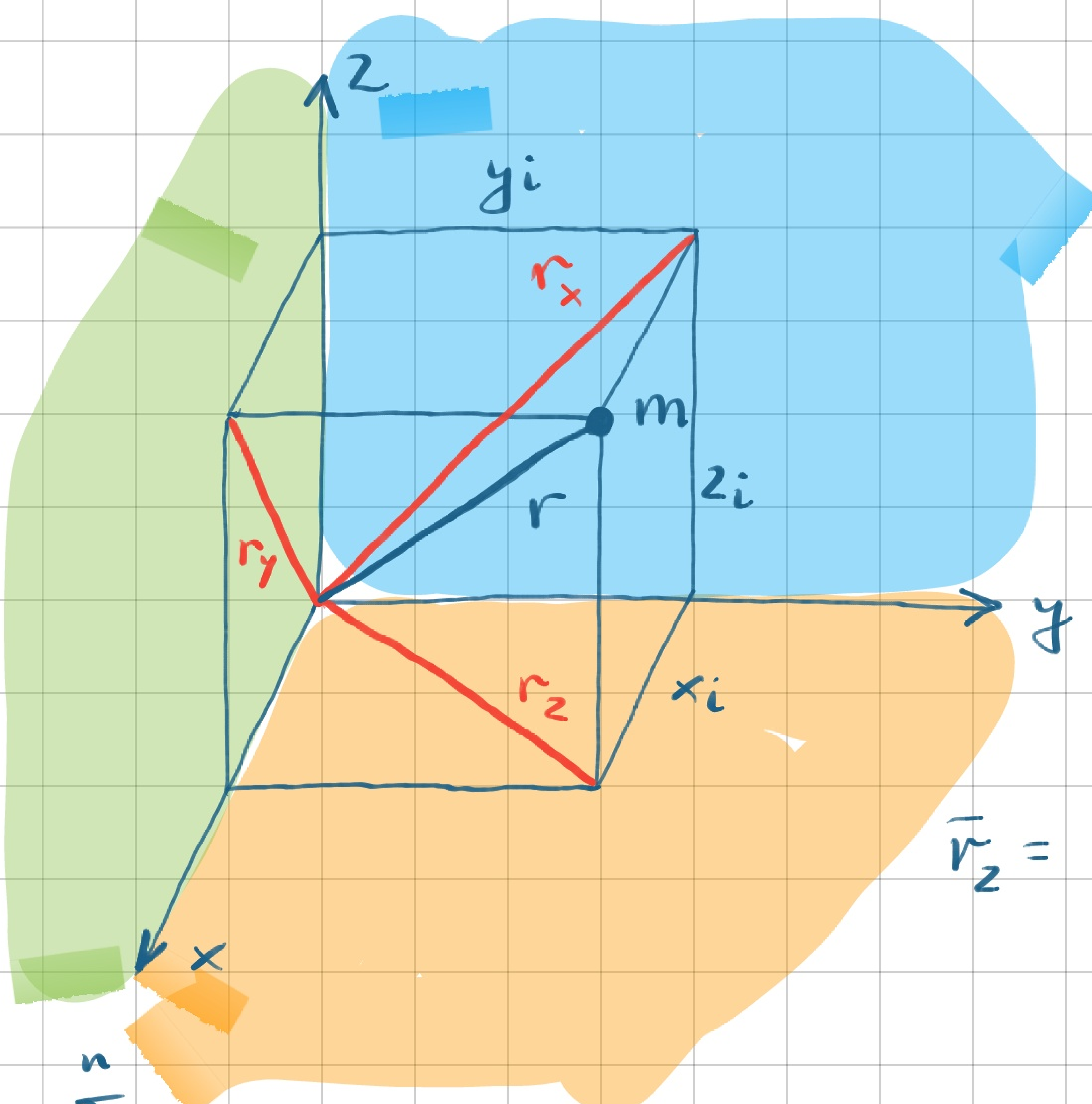
- moment I-rzędu
- addytywny
- może być dodatni lub ujemny

$$S_x = m_i x_i$$

$$S_y = m_i y_i$$

$$S_z = m_i z_i$$

MOMENTY STATYCZNE WZGLĘDEM OSI



$$\bar{r}_z = \bar{x}_i + \bar{y}_i$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{xi}$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{yi}$$

$$S_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{zi}$$

$$\bar{r}_z = \bar{x}_i + \bar{y}_i$$

$$S_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{zi} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i + y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i x_i + \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

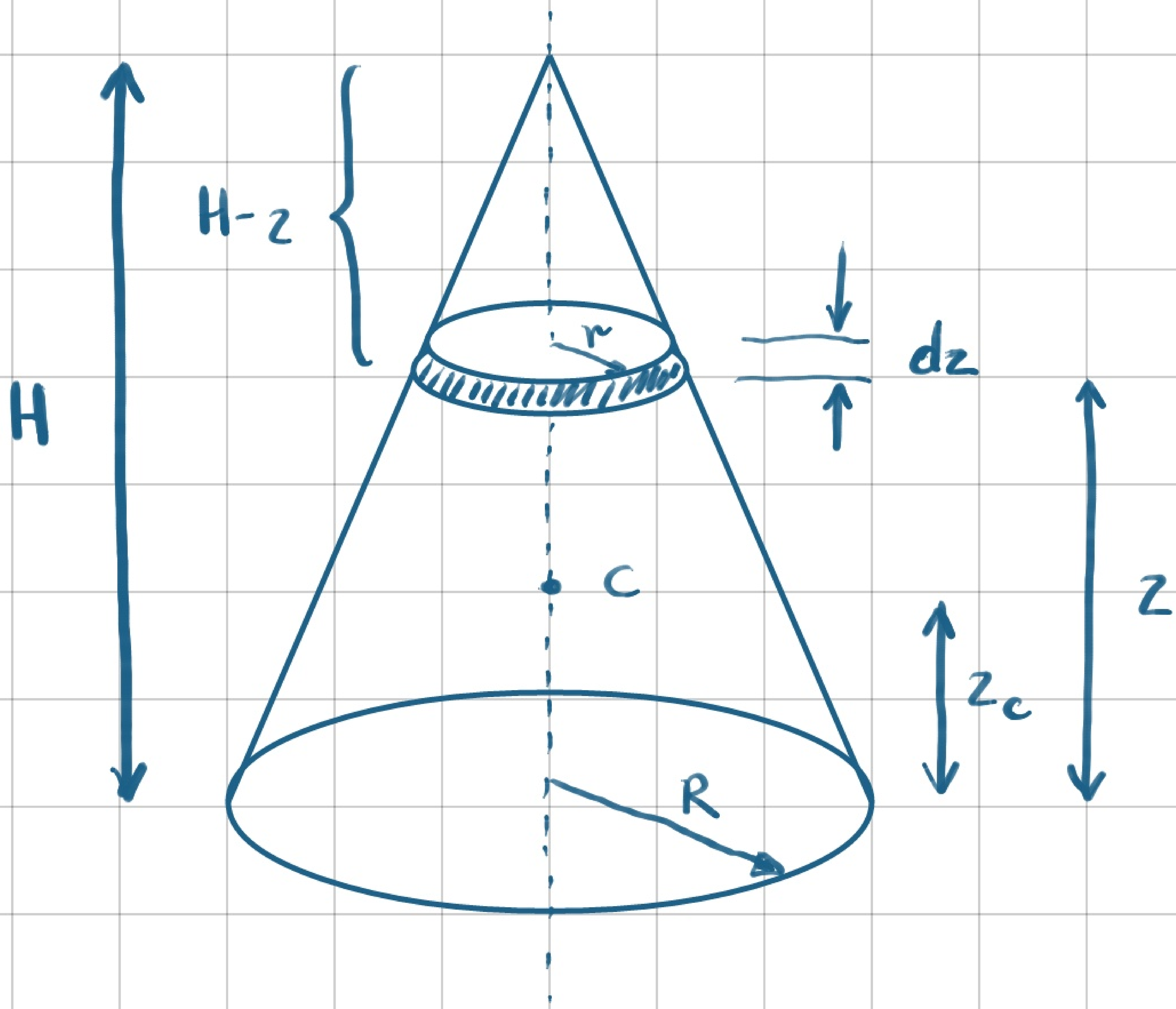
$$S_z = S_{xz} + S_{yz}$$

Moment statyczny względem osi równa się sumie momentów statycznych względem dwóch płaszczyzn prostopadłych, których przecięcie tworzy tę oś.

$$S_x = S_{xy} + S_{xz}$$

$$S_y = S_{xy} + S_{yz}$$

ŚRODEK CIĘŻKOŚCI BRYŁY



stożek jest symetryczny - przecięcie dwóch płaszczyzn tworzy oś prostopadłą do podstawy i przechodzącej przez wierzchołek bryły - środek ciężkości jest zlokalizowany na tej osi - trzeba tylko określić na jakiej wysokości

dz - wysokość elementarna
dV - objętość elementarna

$$dV = \pi r^2 dz \qquad \frac{r}{R} = \frac{H-z}{H}$$

$$r = \frac{H-z}{H} \cdot R$$

$$dV = \pi \left(\frac{H-z}{H} \cdot R\right)^2 dz$$

$$z_c = \frac{\int_V z\, dV}{V} = \frac{\int_0^H z \pi \left(\frac{H-z}{H} \cdot R\right)^2 dz}{\frac{1}{3}\pi R^2 H}$$

objętość stożka

$$z_c = \frac{\frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H (H-z) dz}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{H}{4}$$

ŚRODEK CIĘŻKOŚCI FIGUR PŁASKICH

- zagadnienie figur płaskich sprowadzamy do problemu 2D

- jeśli dodatkowo przyjmiemy, że ciężar figury jest stały (figura jest jednorodna) to problem możemy sprowadzić do samej geometrii

$$x_c = \frac{\int_A x\, dA}{A} \qquad y_c = \frac{\int_A y\, dA}{A}$$

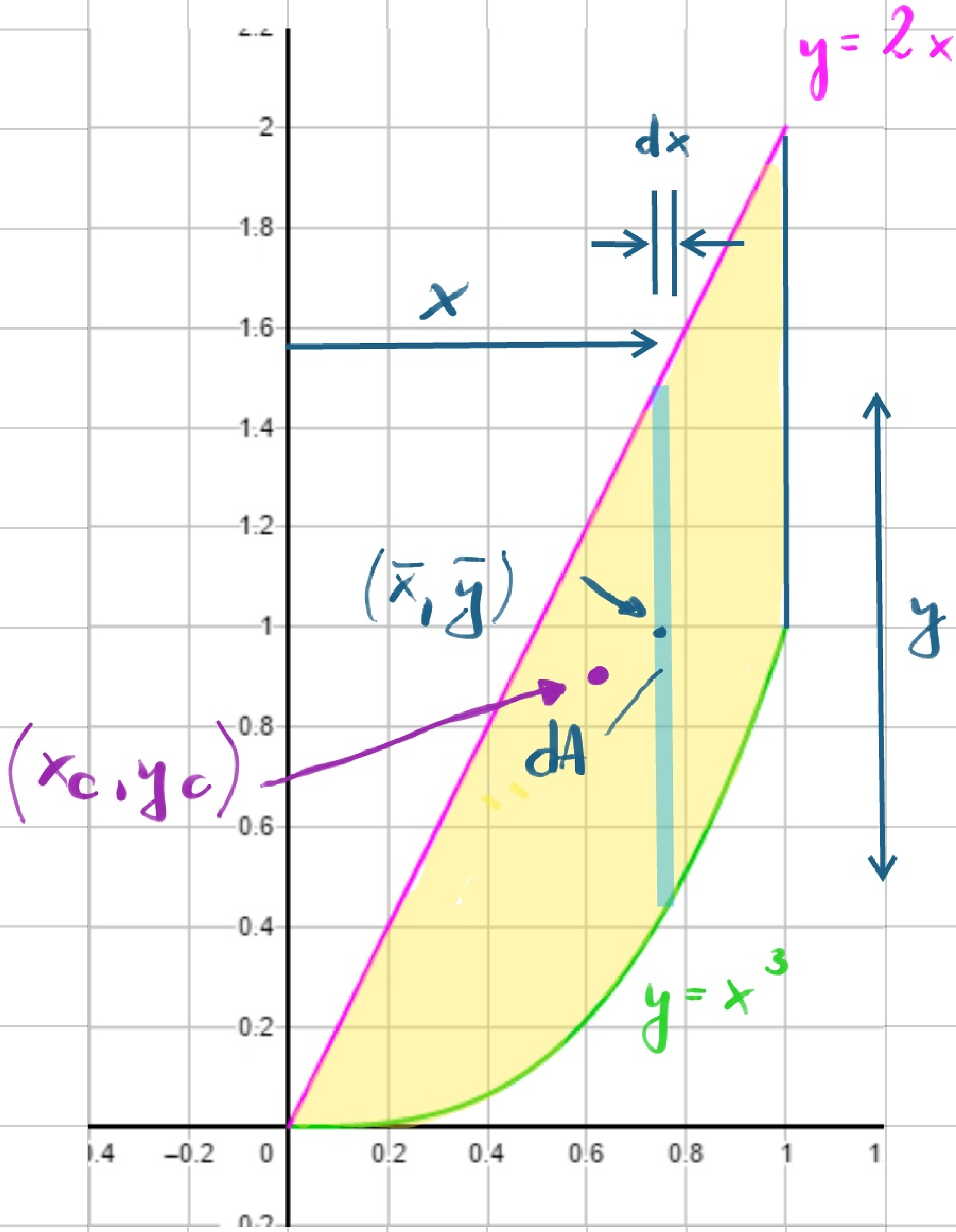
A - pole powierzchni figury

$$x_c = \frac{S_y}{A} \qquad y_c = \frac{S_x}{A}$$

$S_y = \int_A x\,dA$ moment stat. względem osi y

$S_x = \int_A y\,dA$ moment stat. względem osi x

Wyznacz położenie środka ciężkości figury płaskiej ograniczonej przez wykres funkcji $y = 2x$ i $y = x^3$ dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$.



dA - powierzchnie elementarne

$$dA = y\,dx$$

współrzędne środka ciężkości pow. elementarnej

$$\bar{x} = x$$

$$\bar{y} = \frac{y + x^3}{2}$$

$$dA = y\,dx = (2x - x^3)\,dx$$

$$A = \int_A dA = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{2x} dy = \int_0^1 dx \cdot y\Big|_{x^3}^{2x}$$

$$= \int_0^1 (2x - x^3)\,dx = \left(x^2 - \frac{x^4}{4}\right)_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_x = \int_A y\,dA = \int_0^1 (2x - x^3)(2x - x^3)\,dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 - 4x^4 + x^6)\,dx$$

$$= \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{4x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\right)_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7}$$

$$\simeq 0{,}67619$$

$$S_y = \int_A x\,dA = \int_0^1 x\cdot(2x - x^3)\,dx$$

$$= \int_0^1 (2x^2 - x^4)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = 0{,}4(6)$$

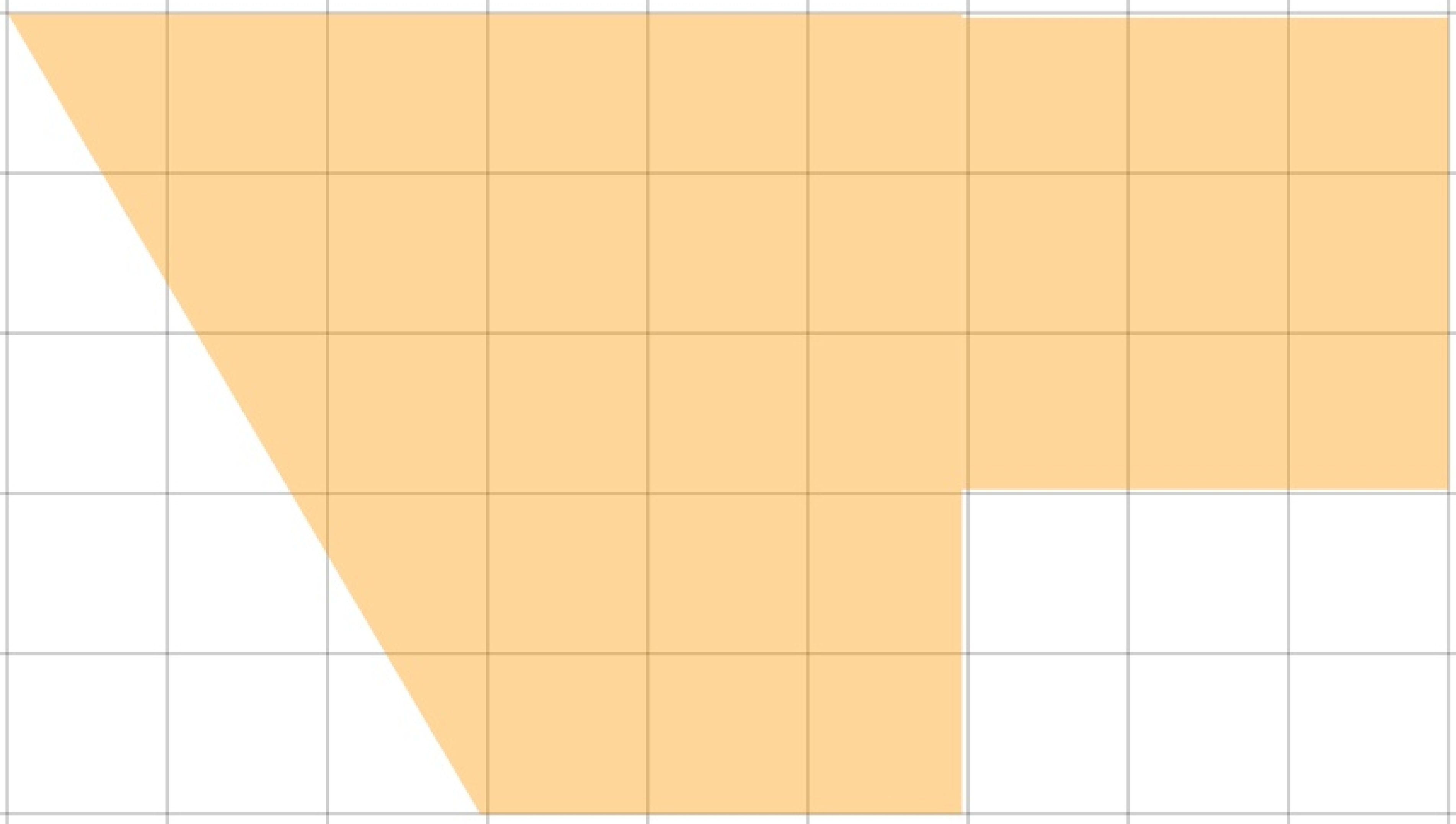
$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{0{,}4(6)}{0{,}75} \simeq 0{,}6(2)$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{0{,}67619}{0{,}75} \simeq 0{,}9016$$

Współrzędne środka ciężkości wynoszą

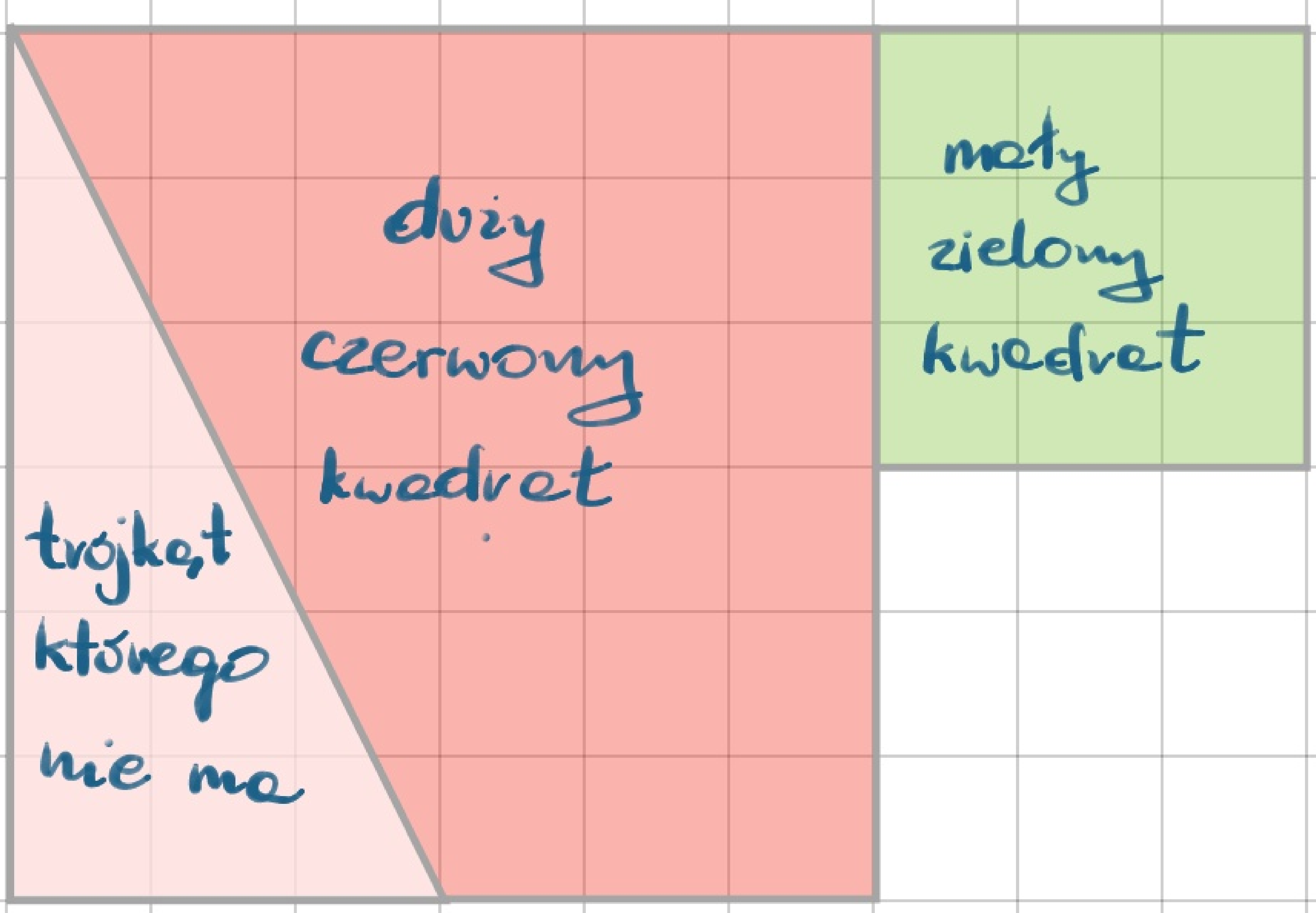
$(0{,}6(2)\,;\ 0{,}9016)$.

Wyznacz położenie środka ciężkości dla figury płaskiej.

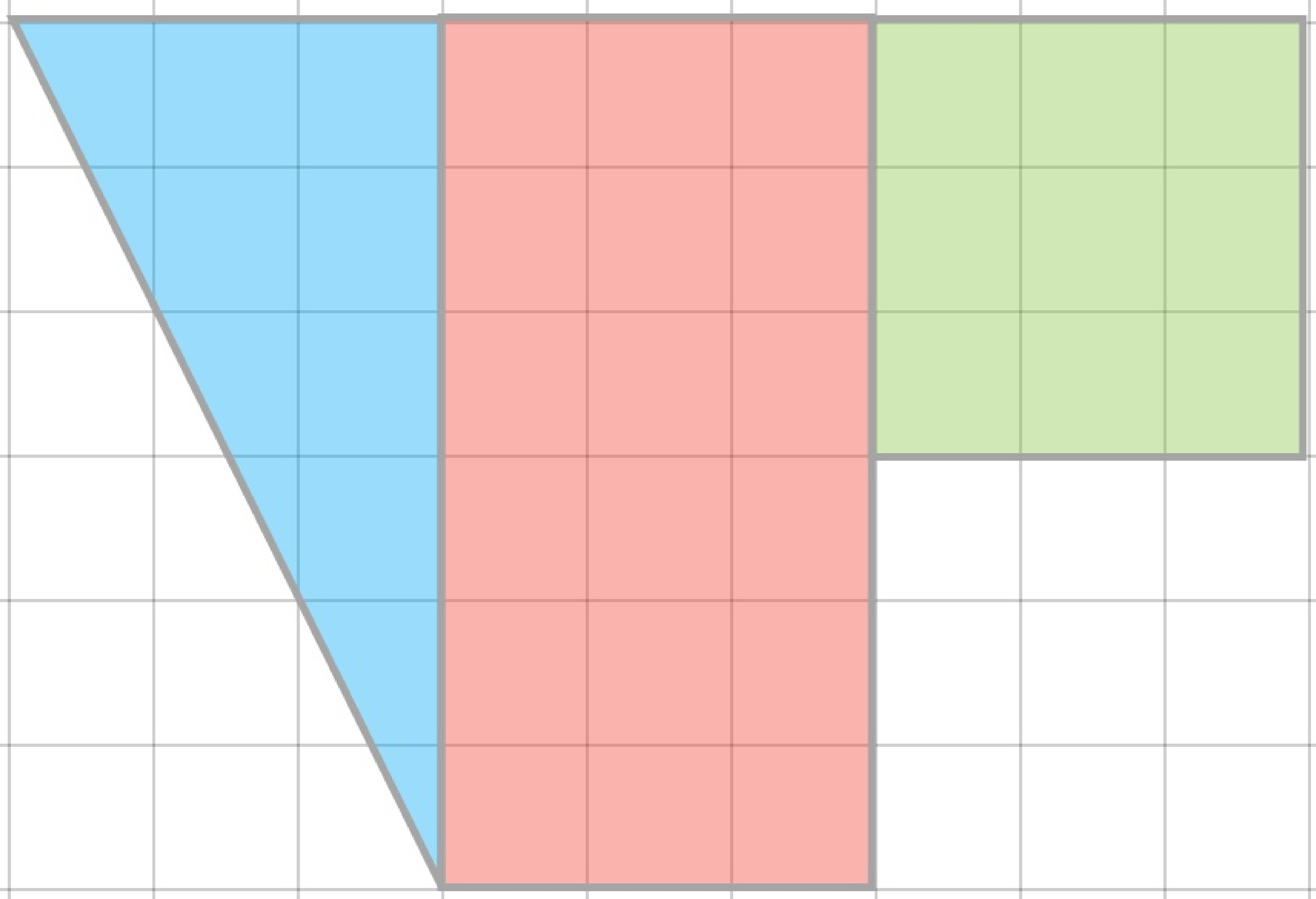


Podaną figurę złożoną należy rozbić na figury proste, dla których wskazanie środka ciężkości nie powinno stanowić trudności.

Przykładowo, możemy zauważyć tu taki rozkład na figury proste:

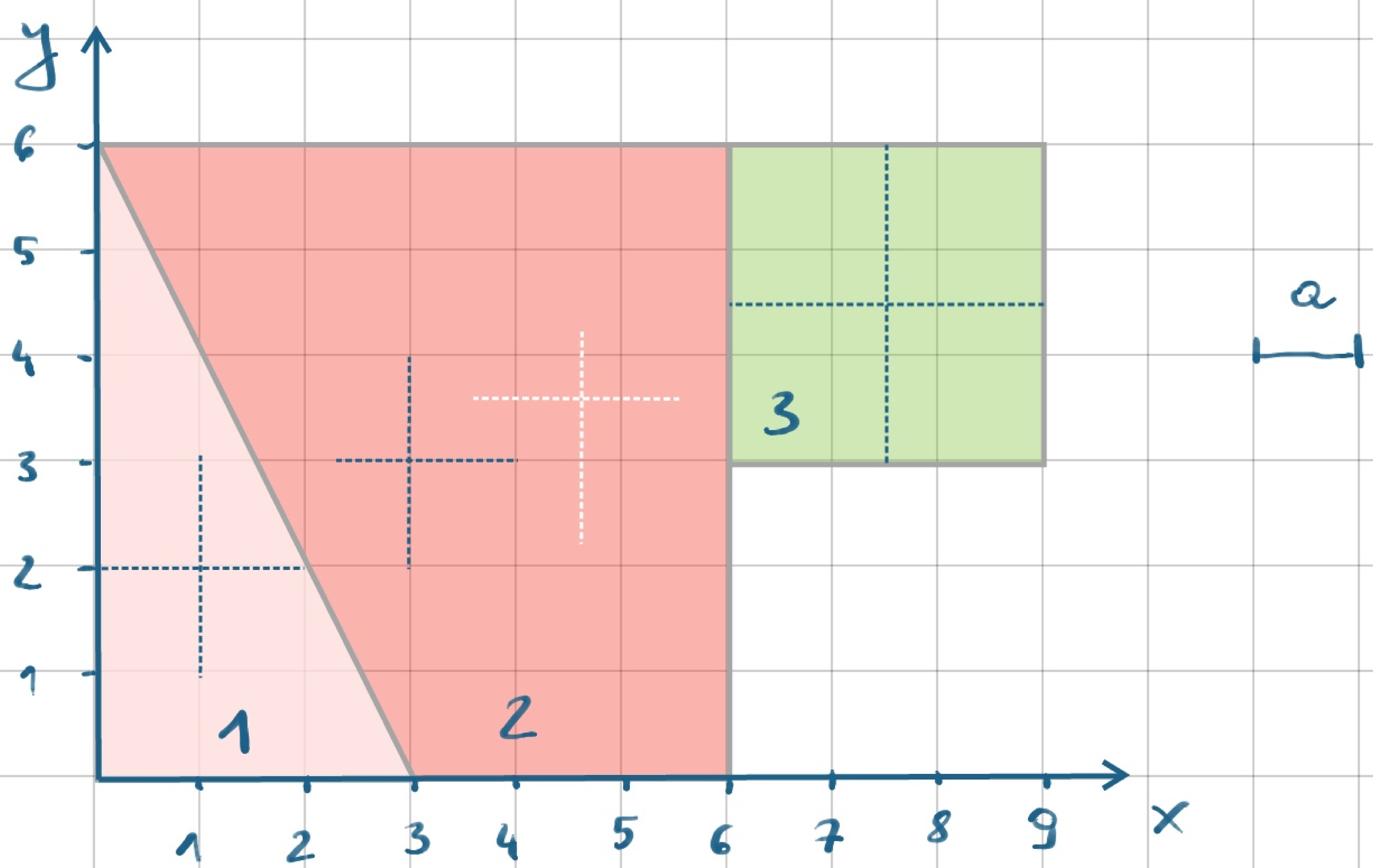


Oczywiście możliwy jest także inny rozkład



Przyświeca nam jedna zasada - im mniej figur prostych, tym łatwiejsze i krótsze obliczenia.

Obliczenia przeprowadzimy dla obu wariantów.



Układ współrzędnych przyjmujemy dowolnie.

Środki ciężkości figur prostych i ich pole

$x_1 = a \quad y_1 = 2a \quad A_1 = 9a^2$

$x_2 = 3a \quad y_2 = 3a \quad A_2 = 36a^2$

$x_3 = 7{,}5a \quad y_3 = 4{,}5a \quad A_3 = 9a^2$

$$A = 36a^2 - 9a^2 + 9a^2 = 36a^2$$

$$S_x = 36a^2 \cdot 3a - 9a^2 \cdot 2a + 9a^2 \cdot 4{,}5a$$

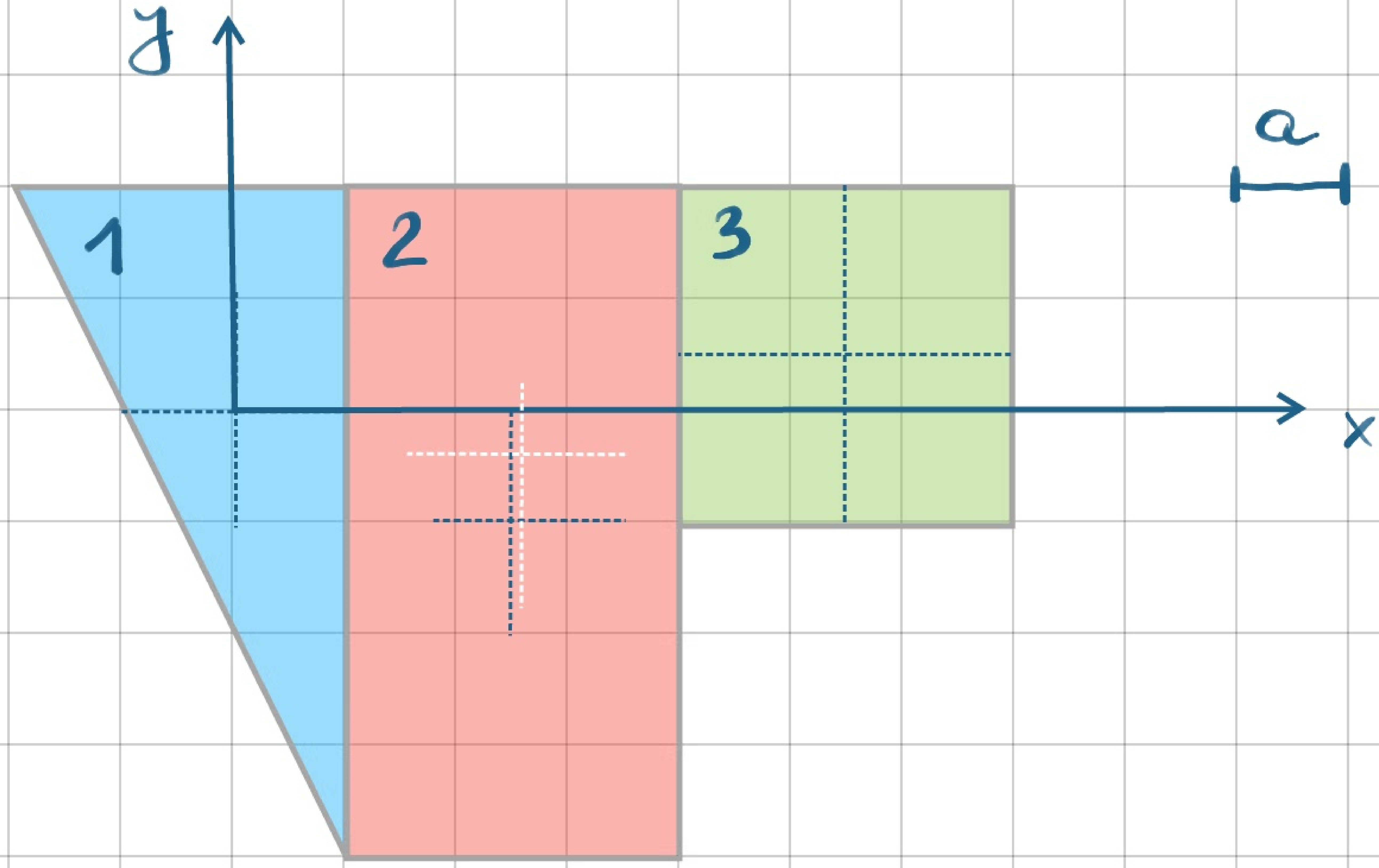
$$= 108a^3 - 18a^3 + 40{,}5a^3 = 130{,}5a^3$$

$$S_y = 36a^2 \cdot 3a - 9a^2 \cdot a + 9a^2 \cdot 7{,}5a$$

$$= 108a^3 - 9a^3 + 67{,}5a^3 = 166{,}5a^3$$

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{166{,}5a^3}{36a^2} = 4{,}625a$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{130{,}5a^3}{36a^2} = 3{,}625a$$



$$x_1 = 0 \qquad y_1 = 0 \qquad A_1 = 9a^2$$

$$x_2 = 2{,}5a \qquad y_2 = -a \qquad A_2 = 18a^2$$

$$x_3 = 5{,}5a \qquad y_3 = 0{,}5a \qquad A_3 = 9a^2$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 36a^2$$

$$S_x = 9a^2 \cdot 0 + 18a^2 \cdot (-a) + 9a^2 \cdot 0{,}5a$$

$$= -18a^3 + 4{,}5a^3 = -13{,}5a^3$$

$$S_y = 9a^2 \cdot 0 + 18a^2 \cdot 2{,}5a + 9a^2 \cdot 5{,}5a$$

$$= 45a^3 + 49{,}5a^3 = 94{,}5a^3$$

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{94{,}5a^3}{36a^2} = 2{,}625a$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{-13{,}5a^3}{36a^2} = -0{,}375a$$

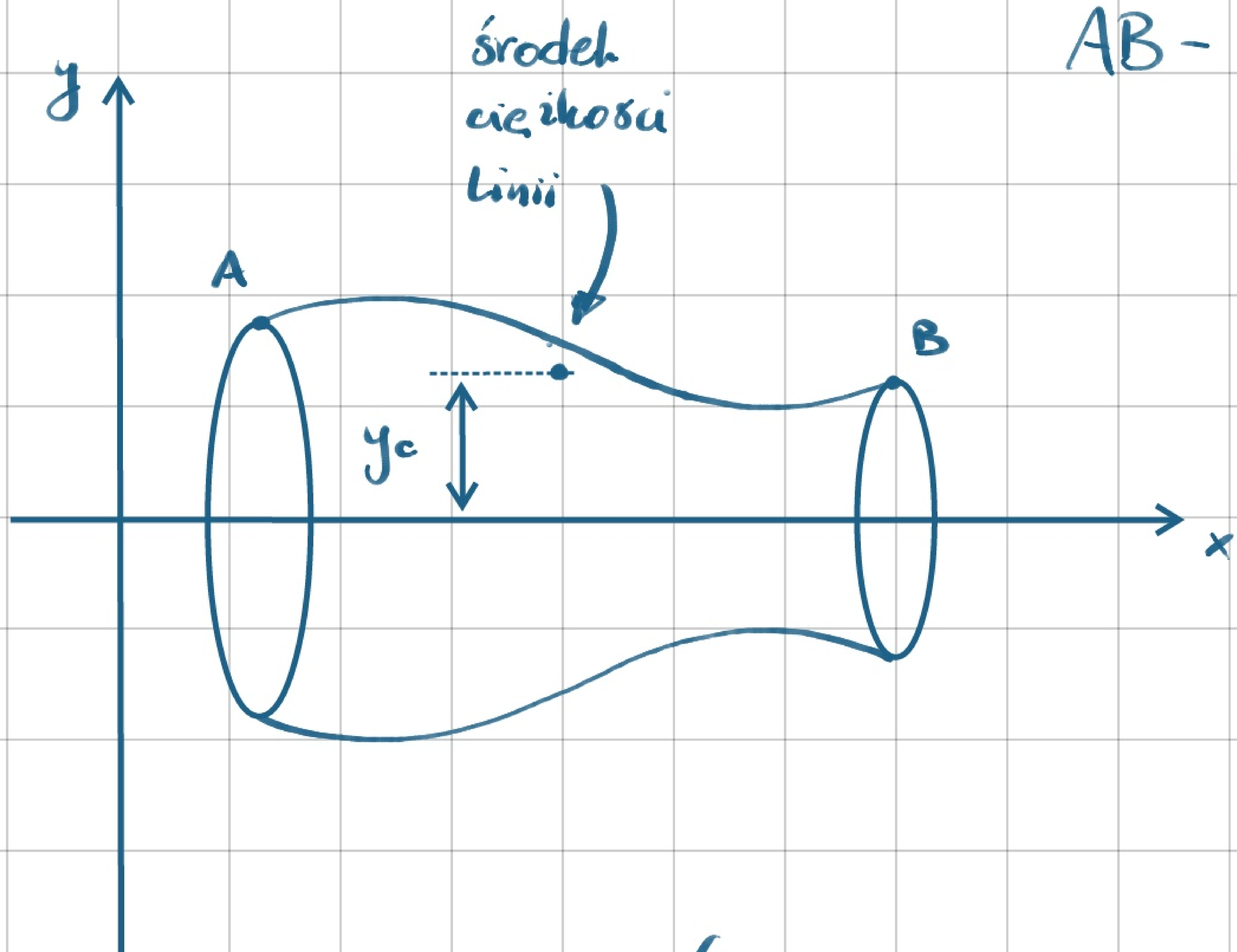
Podsumujmy:

- jeśli figura prosta reprezentuje „dziurę" to obliczając moment statyczny odejmujemy jej wkład
- niezależnie od układu figur położenie środka ciężkości figury złożonej jest takie samo
- niezależnie od położenia początku układu położenie środka ciężkości figury złożonej jest takie samo

TWIERDZENIA GULDINA

I TWIERDZENIE GULDINA

Pole powierzchni A powstałej przez obrót płaskiej linii o długości l dookoła osi leżącej w płaszczyźnie tej linii i nie przecinającej jej jest równe iloczynowi długości linii l przez długość obwodu okręgu $2\pi y_c$, który opisuje jej środek ciężkości.



AB – linia o długości l

$$A = 2\pi \int_{AB} y \, dl$$

$$y_c = \frac{\int_{AB} y \, dl}{L}$$

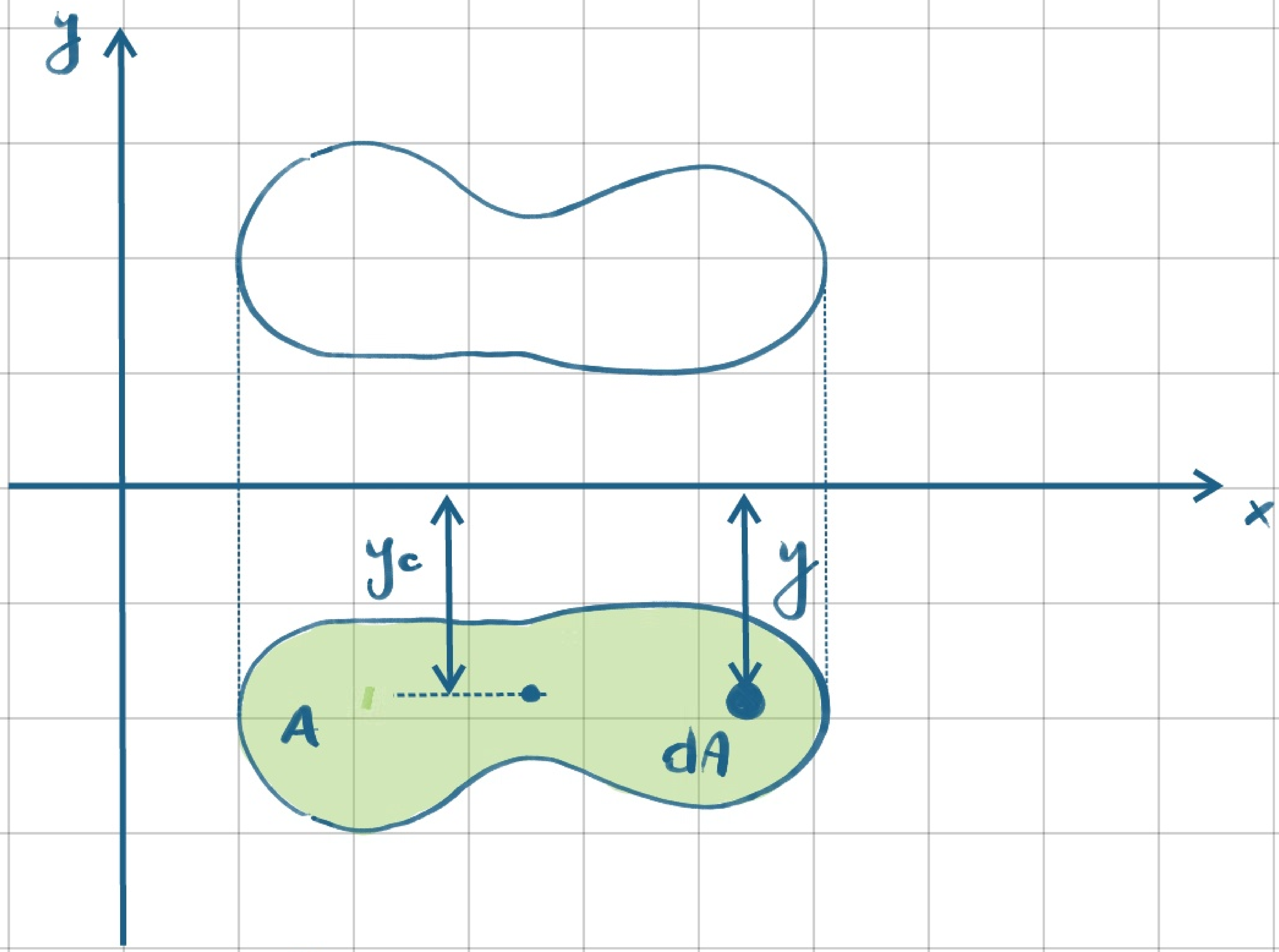
$$\int_{AB} y \, dl = y_c L$$

$$A = 2\pi y_c L$$

II TWIERDZENIE GULDINA

Objętość bryły powstałej wskutek obrotu figury płaskiej, o polu A, dookoła osi leżącej w jej płaszczyźnie i nie przecinającej tej figury równa się iloczynowi pola powierzchni A przez długość obwodu okręgu $2\pi y_c$, który opisuje środek ciężkości.

$$V = 2\pi \int_A y \, dA$$



$$y_c = \frac{\int_A x \, dA}{A}$$

$$\int_A x \, dA = y_c A$$

$$V = 2\pi y_c A$$