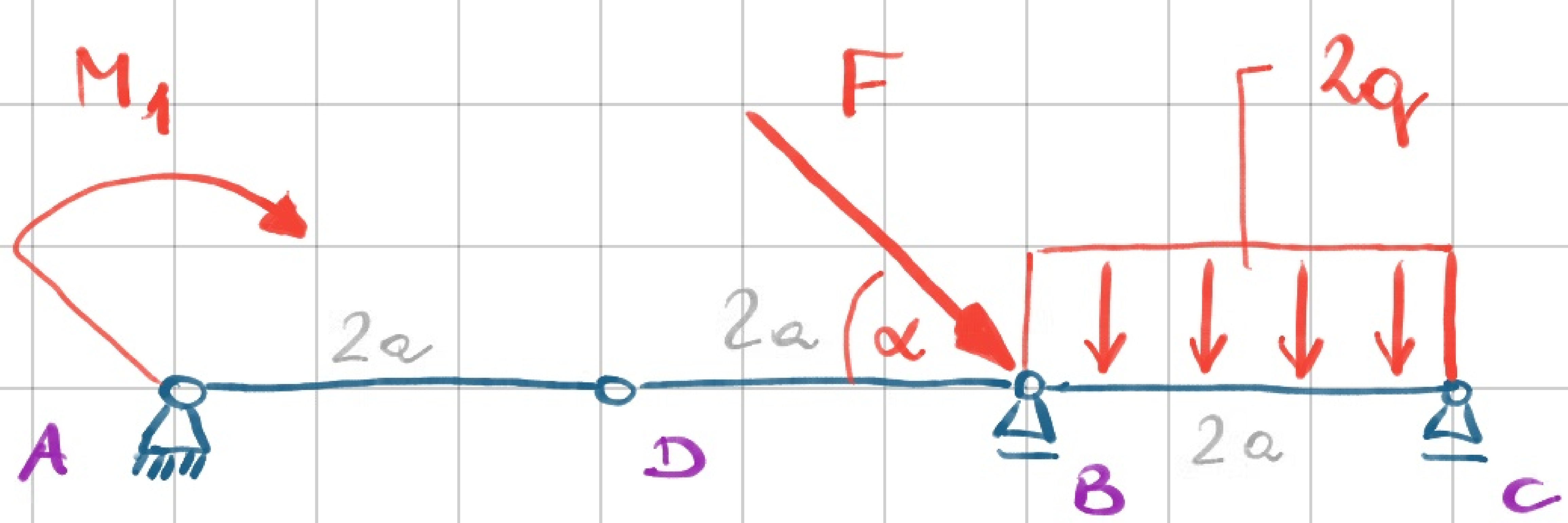
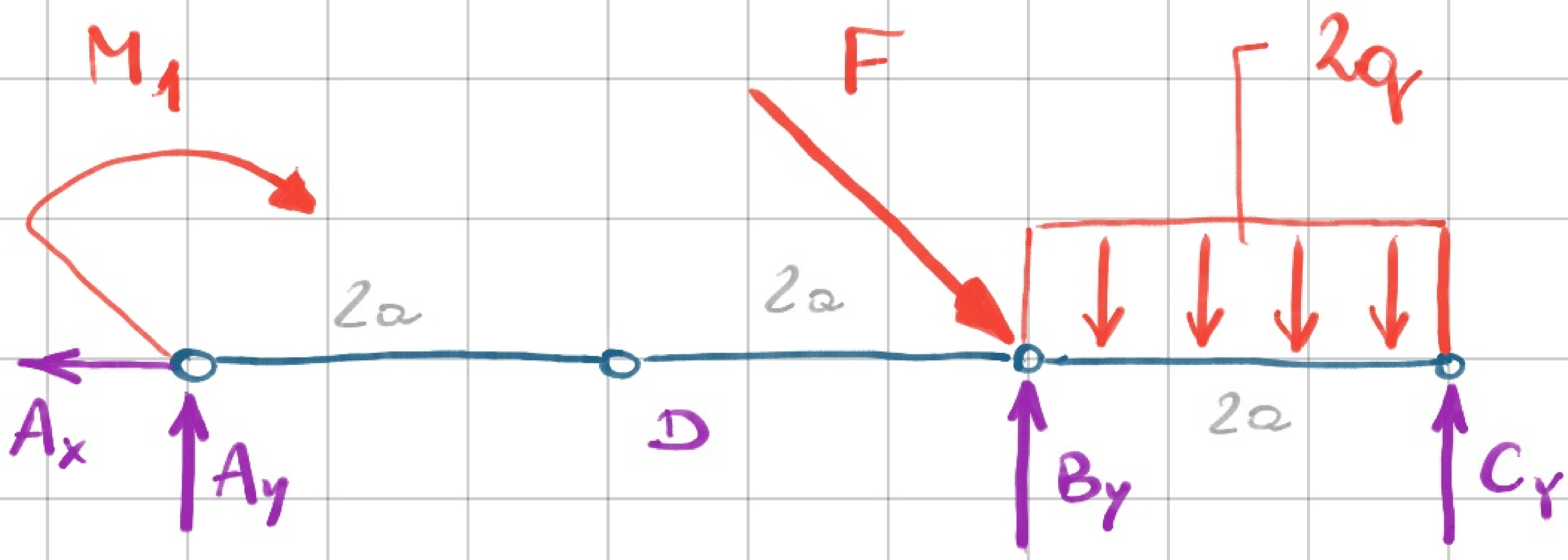
BELKA Z PRZEGUBEM

Jak już wspomniano przegub w belce nie przenosi momentu gnącego. Jest w takim razie dobrym miejscem do „diagnozy" równowagi na moment gnący w przedziale obejmującym przegub.
Przegub sam w sobie nie stanowi przyczyny do tworzenia granicy przedziału.

$M_1 = 6qa^2$
$F_1 = 3\sqrt{2}qa$
$\alpha = 45°$



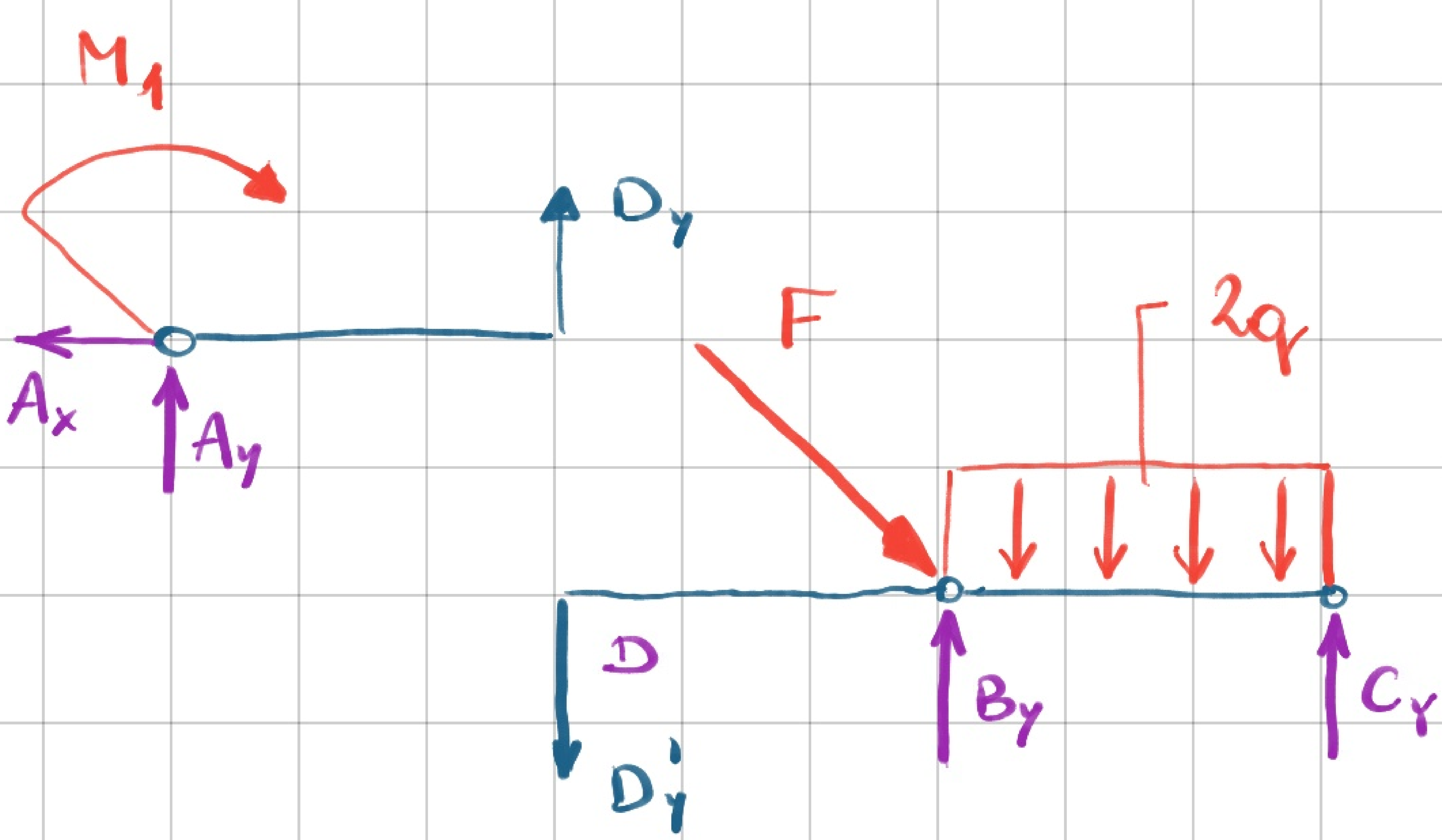
Wprowadzenie przegubu wymusza konieczność wprowadzenia podpory przesuwnej.



Wprowadzenie dodatkowej podpory powoduje powstanie dodatkowej reakcji.
W celu wyznaczenia n reakcji potrzeba zbudować n równań. Jest to możliwe, ponieważ:

- belkę można podzielić w przegubie na dwie belki i osobno dla każdej z nich zbudować równania,
- jest możliwe budowanie równań na sumę momentów sił tylko na lewo lub tylko na prawo od przegubu przyjmując biegun właśnie w przegubie.

ROZDZIELENIE BELKI W PRZEGUBIE NA BELKI PROSTE



W przegubie po rozdzieleniu belek należy wprowadzić reakcję D_y i D_y'. Po złożeniu belek siły te znoszą się. $|D_y| = |D_y'|$

Dla każdej części osobno można napisać równanie równowagi jak dla zwykłej belki swobodnie podpartej.

Dla lewej strony:

$$(1)\quad \sum F_{iy}: \quad A_y + D_y = 0$$
$$(2)\quad \sum M_i^D: \quad M_1 + A_y \cdot 2a = 0$$

$$A_y = -\frac{M_1}{2a} = -3qa$$
$$D_y = -A_y = 3qa$$

skoro znamy D_y, to:

$$D_y' = 3qa$$

Dla prawej strony:

$$(3)\quad \sum F_{iy}: \quad -D_y' + B_y + C_y - F_y - 2q \cdot 2a = 0$$
$$(4)\quad \sum M_i^B: \quad -D_y' \cdot 2a + 2q \cdot 2a \cdot a - C_y \cdot 2a = 0 \,/ : a$$

z (4)
$$-2D_y' + 4qa = 2C_y$$
$$-6qa + 4qa = 2C_y$$
$$C_y = -qa$$

z (3) $-D_y' + C_y - F_y - 2q \cdot 2a = -B_y$

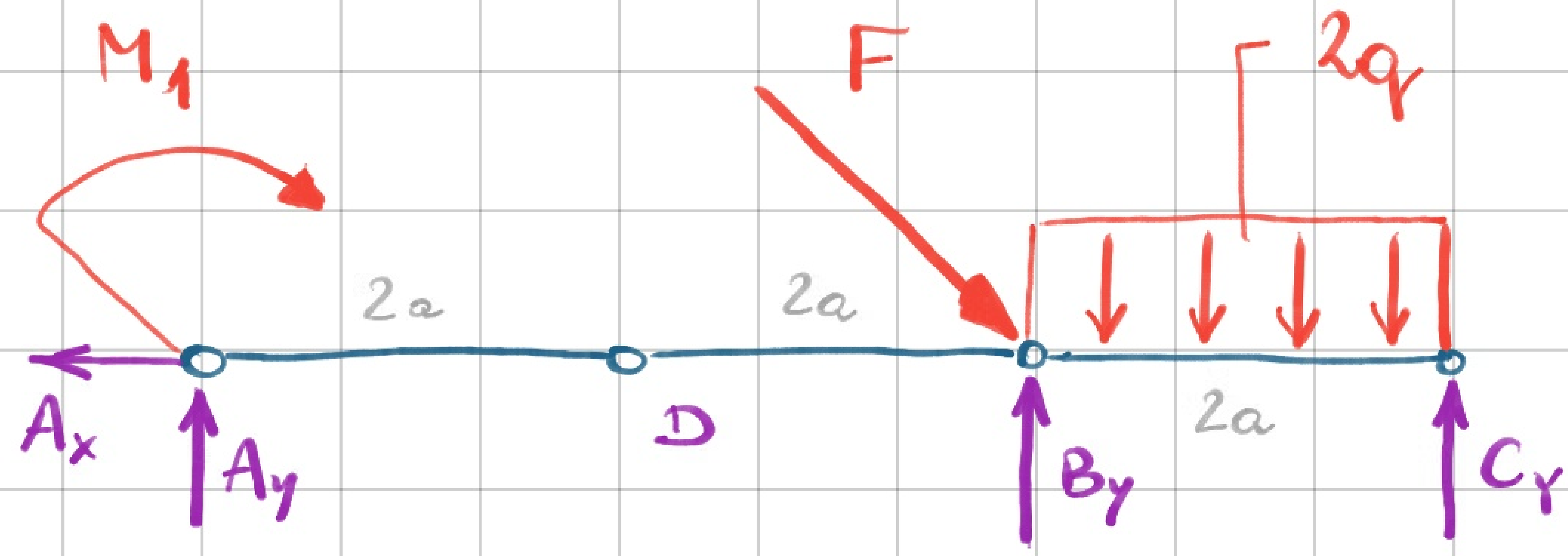
$$-3qa - qa - 3qa - 4qa = -B_y$$

$$B_y = 11qa$$

Reakcje A_x policzymy dla całej belki: $-A_x + F_x = 0$

$$A_x = 3qa$$

TERAZ BEZ DZIELENIA BELKI, ALE ZA TO Z BIEGUNEM W PRZEGUBIE



(a) Po lewej stronie przegubu:

$$\sum M_i^{DL}: \quad M_1 + A_y \cdot 2a = 0 \;/ :a$$

(b) Po prawej stronie przegubu:

$$\sum M_i^{DP}: \quad F_y \cdot 2a - B_y \cdot 2a + 2q \cdot 2a \cdot 3a - C_y \cdot 4a = 0 \;/ :a$$

$$2F_y - 2B_y + 12qa - 4C_y = 0$$

(c) Klasycznie, względem przegubu w podporze:

$$\Sigma M^B: \quad M_1 + A_y \cdot 4a + 2q \cdot 2a \cdot a - C_y \cdot 2a = 0$$

(d) Równanie do wyznaczenia reakcji A_x

$$-A_x + F_x = 0$$

Teraz, posiadając komplet równań, możemy wyznaczyć wszystkie reakcje:

(a) $M_1 + A_y \cdot 2a = 0 \quad / : a$

$$\frac{M_1}{a} = -2A_y$$

$$6qa = -2A_y$$

$$\boxed{A_y = -3qa}$$

(c) $M_1 + A_y \cdot 4a + 4qa^2 - C_y \cdot 2a = 0 \; | :a$

$$\frac{M_1}{a} + 4A_y + 4qa = 2C_y$$

$$6qa - 12qa + 4qa = 2C_y$$

$$-2qa = 2C_y$$

$$C_y = -qa$$

(b) $2F_y - 2B_y + 12qa - 4C_y = 0$

$$6qa + 12qa + 4qa = 2B_y$$

$$22qa = 2B_y$$

$$B_y = 11qa$$

(d) $A_x = F_x$

$$A_x = 3qa$$

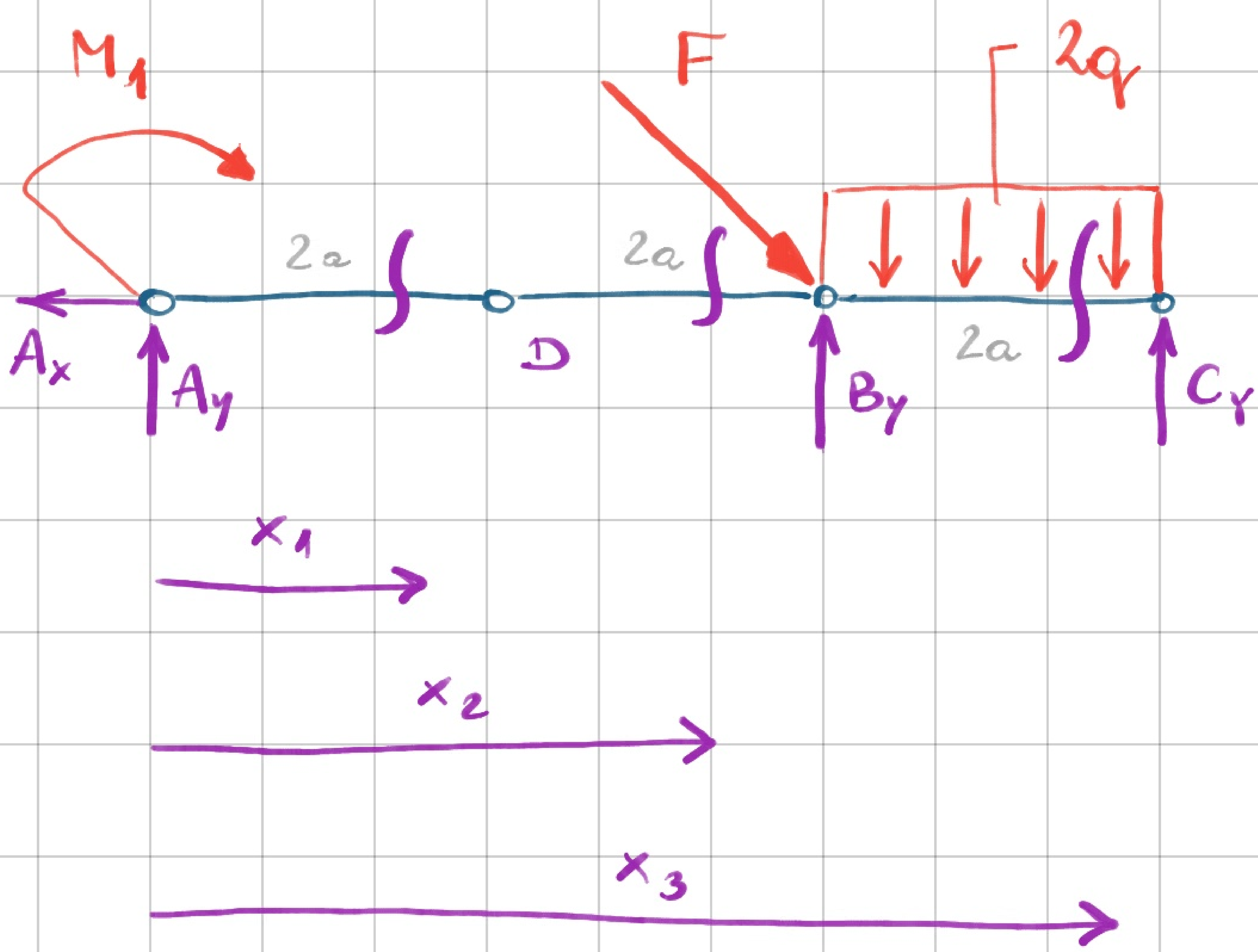
Reakcje oczywiście sprawdzamy:

$$\Sigma M^P: \ M_1 + A_y \cdot 2a + F_y \cdot 2a - B_y \cdot 2a + 2q \cdot 2a \cdot 3a - C_y \cdot 4a = 0$$

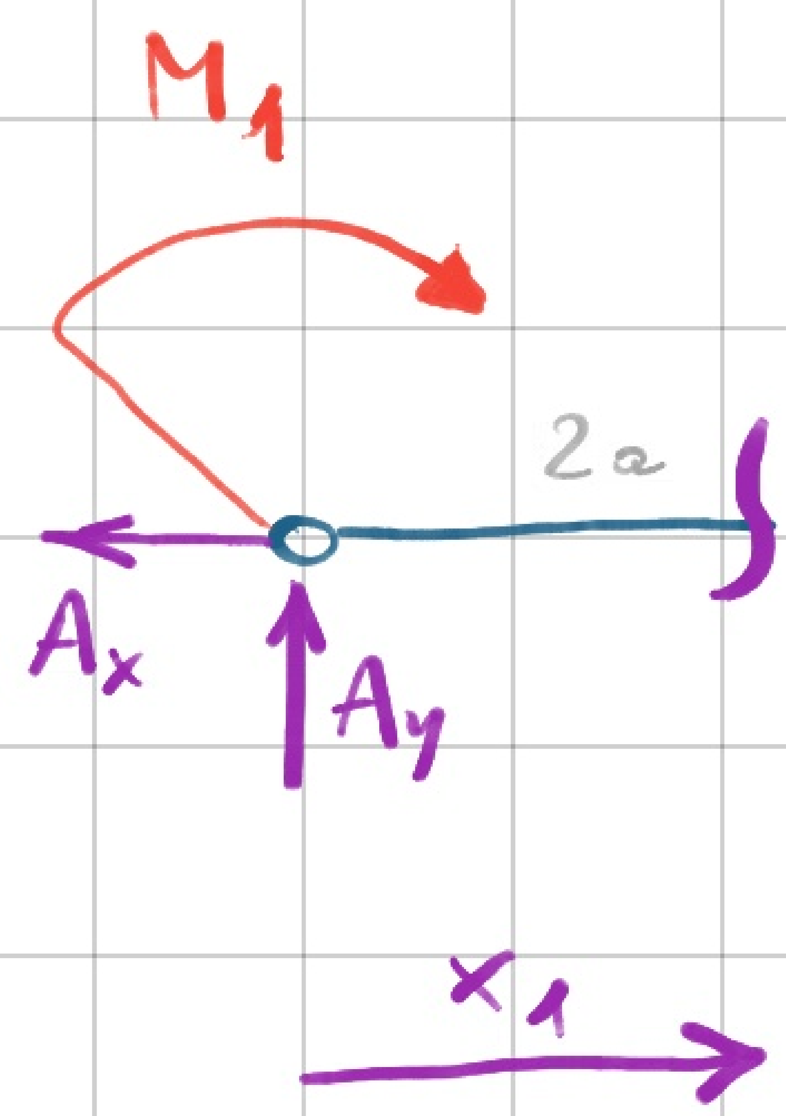
$$6qa^2 - 6qa^2 + 6qa^2 - 22qa^2 + 12qa^2 + 4qa^2 = 0$$

$$0 = 0 \qquad \text{OK!}$$

Teraz możemy wyznaczyć przedziały i policzyć interesujące nas wielkości:



Przedział I od lewej strony:



$$Mg^{IL}: \; M_1 + A_y \cdot x_1$$

$$Mg^{IL}(x_1 = 0) = M_1 = 6qa^2$$

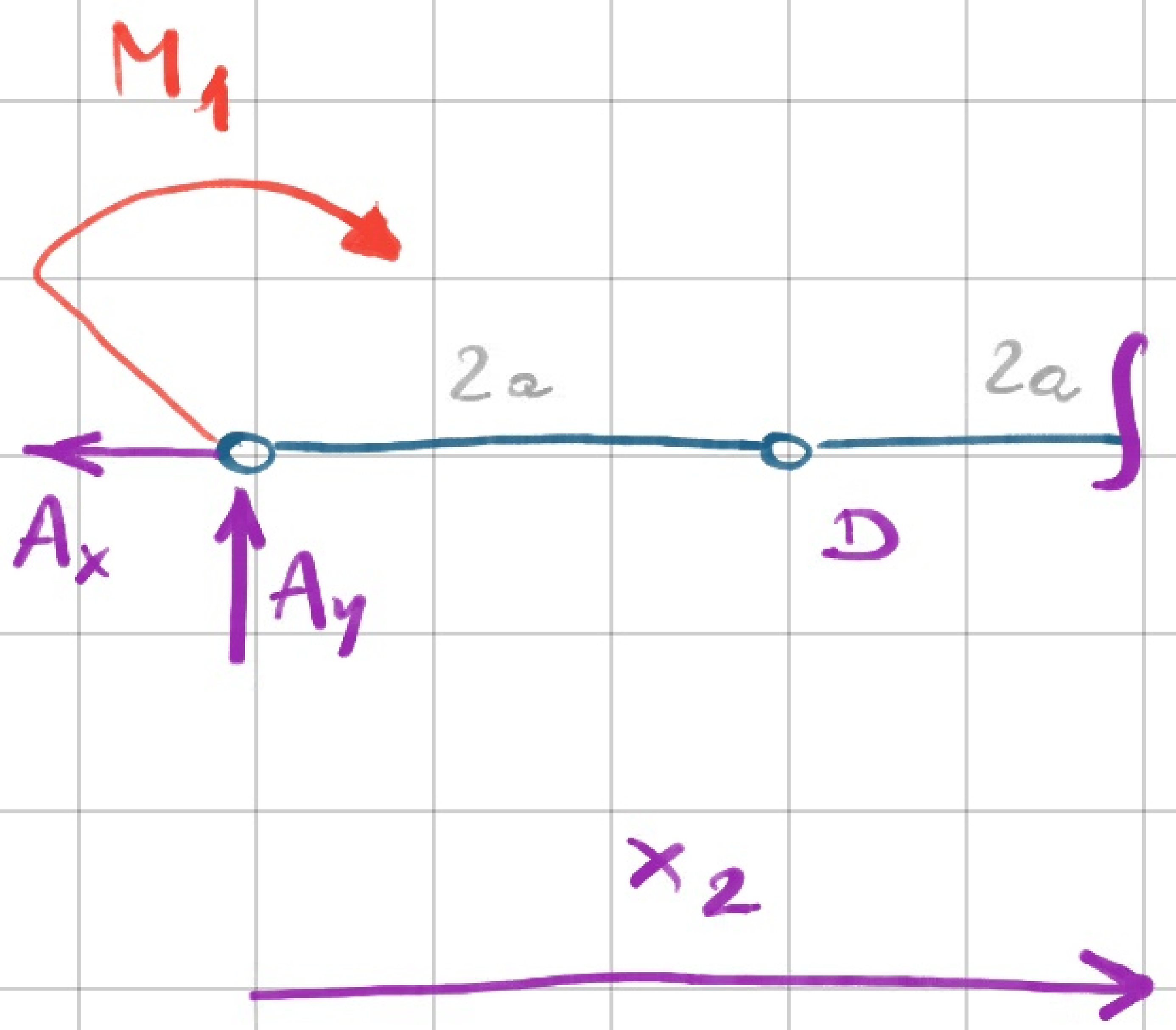
$$Mg^{IL}(x_1 = a) = M_1 + A_y a = 6qa^2 - 3qa^2 = 3qa^2$$

$$Mg^{I}(x_2 = 2a) = M_1 + A_y 2a = 6qa^2 - 6qa^2 = 0$$

↳ to istotny wynik, w przegubie wartość $Mg = 0$

$$T^{I} = A_y = -3qa$$

Przedział $\underline{\text{II}}$ od lewej strony:



$$M_g^{II\,L}: \quad M_1 + A_y x_2$$

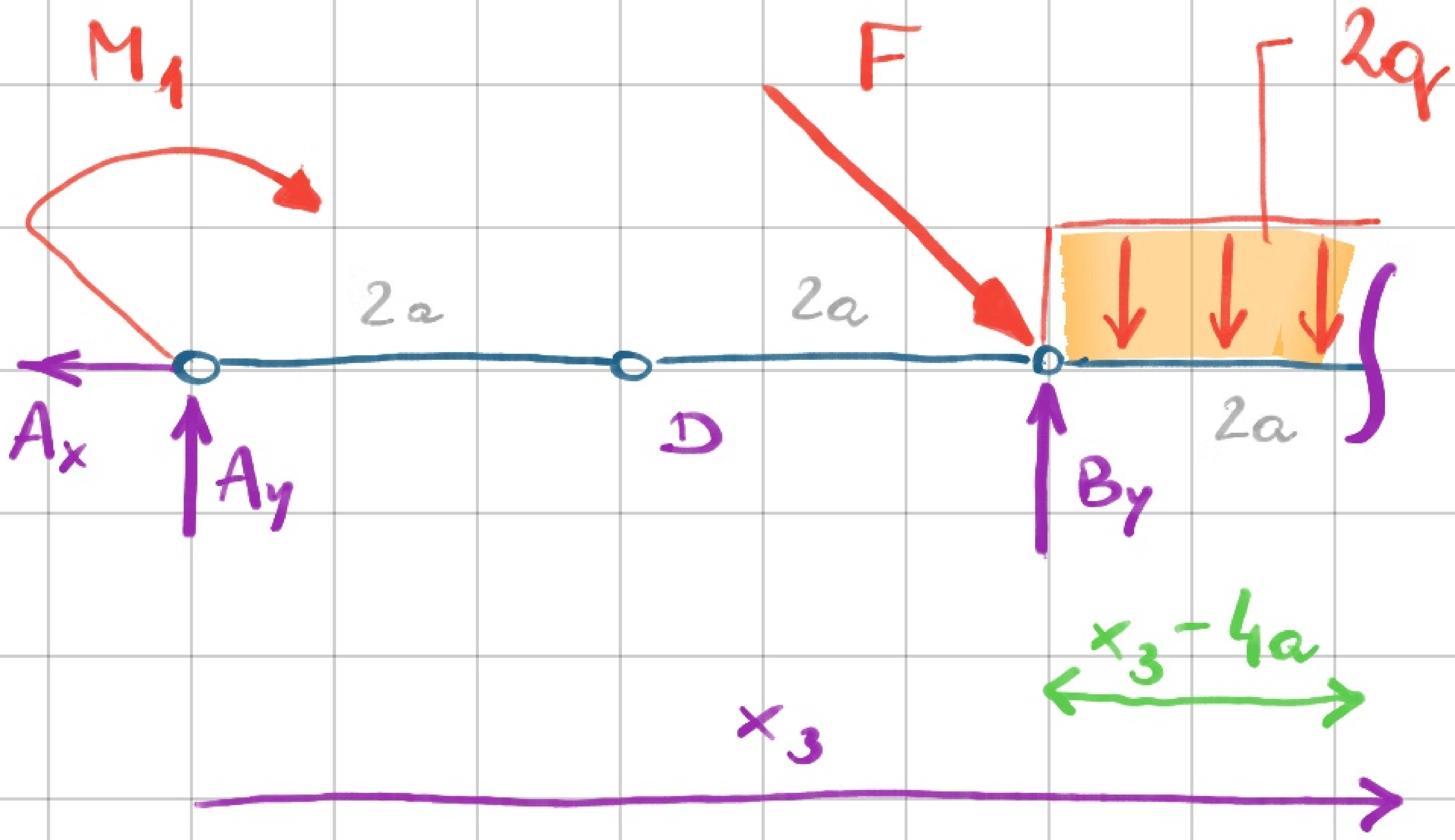
$$T^{II}: \quad A_y = -3qa$$

$$M_g^{II\,L}(x_2 = 4a) = M_1 + 4a A_y = 6qa^2 - 12qa^2 = -6qa^2$$

Jak widać kolejny przedział wyznaczony za przegubem niczego nowego nie wnosi. Nie ma zatem przyczynku do tego by przez samą obecność przegubu tworzyć w nim granicę przedziału.

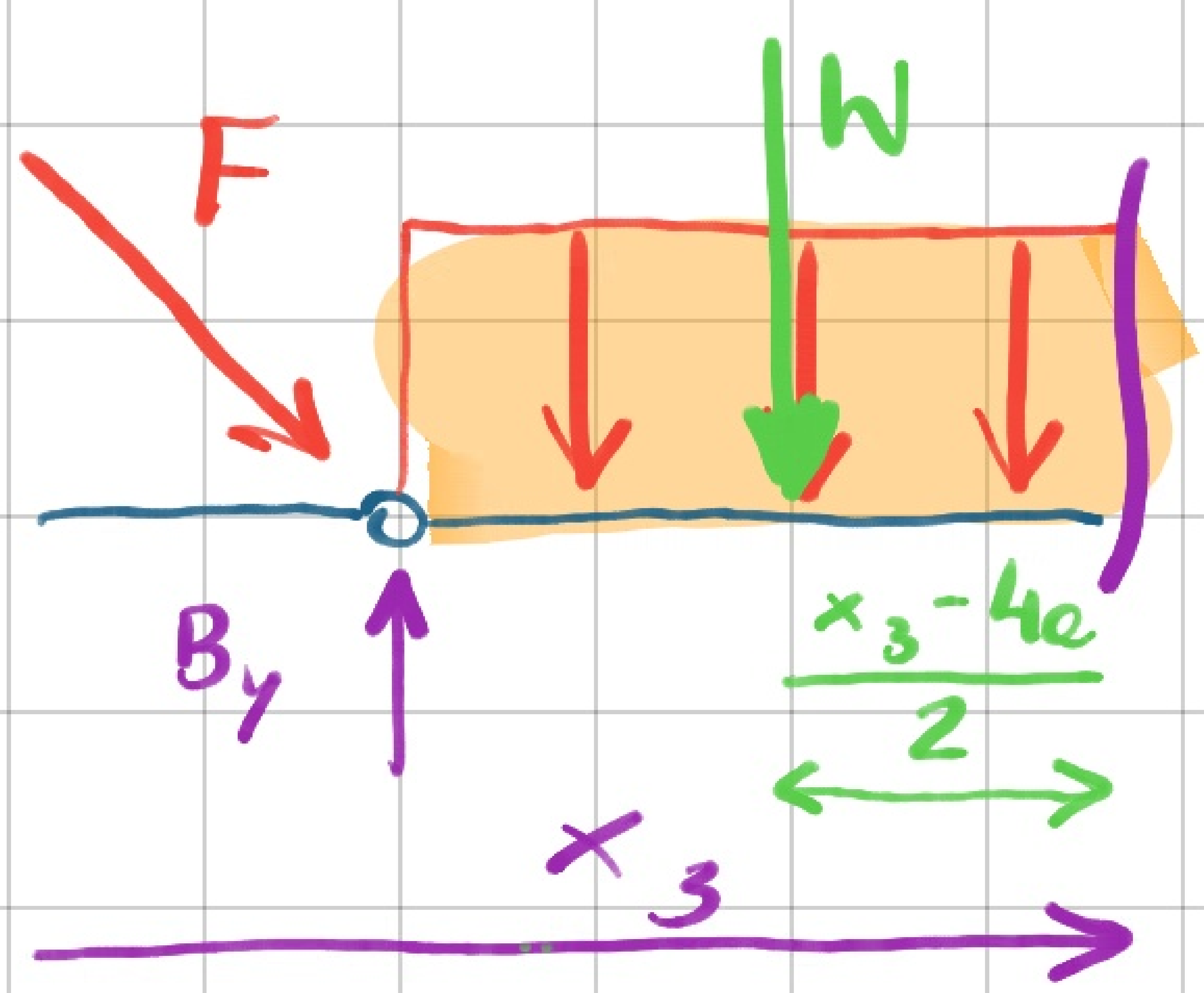
Warto natomiast sprawdzić czy moment gnący w przegubie zeruje się.

Przedział $\underline{III}$ od lewej strony:



$$M_g^{III\,L}: M_1 + A_y x_3 - F_1(x_3 - 4a) + B_y(x_3 - 4a) \underbrace{- q\,(x_3 - 4a)^2}$$

Warto wyjaśnić, skąd wziął się ten człon równania:



Interesuje nas tylko zamalowany fragment obciążenia ciągłego, do miejsca oznaczonego cięciem

Ten fragment można zastąpić siłą skupioną W, która działa po środku fragmentu:

$W = 2q \cdot (x_3 - 4a)$

od miejsca w którym zaczyna działać siła W do cięcia jest $\frac{x_3 - 4a}{2}$ stąd ostatecznie $2q \cdot (x_3 - 4a)\,\frac{x_3 - 4a}{2}$

co po skróceniu daje $q\,(x_3 - 4a)^2$

$$M_g^{III\,L}(x_3 = 6a) = 6qa^2 - 18qa^2 - 6qa^2 + 22qa^2 - 4qa^2$$

$$M_g^{III\,L}(x_3 = 6a) = 0$$

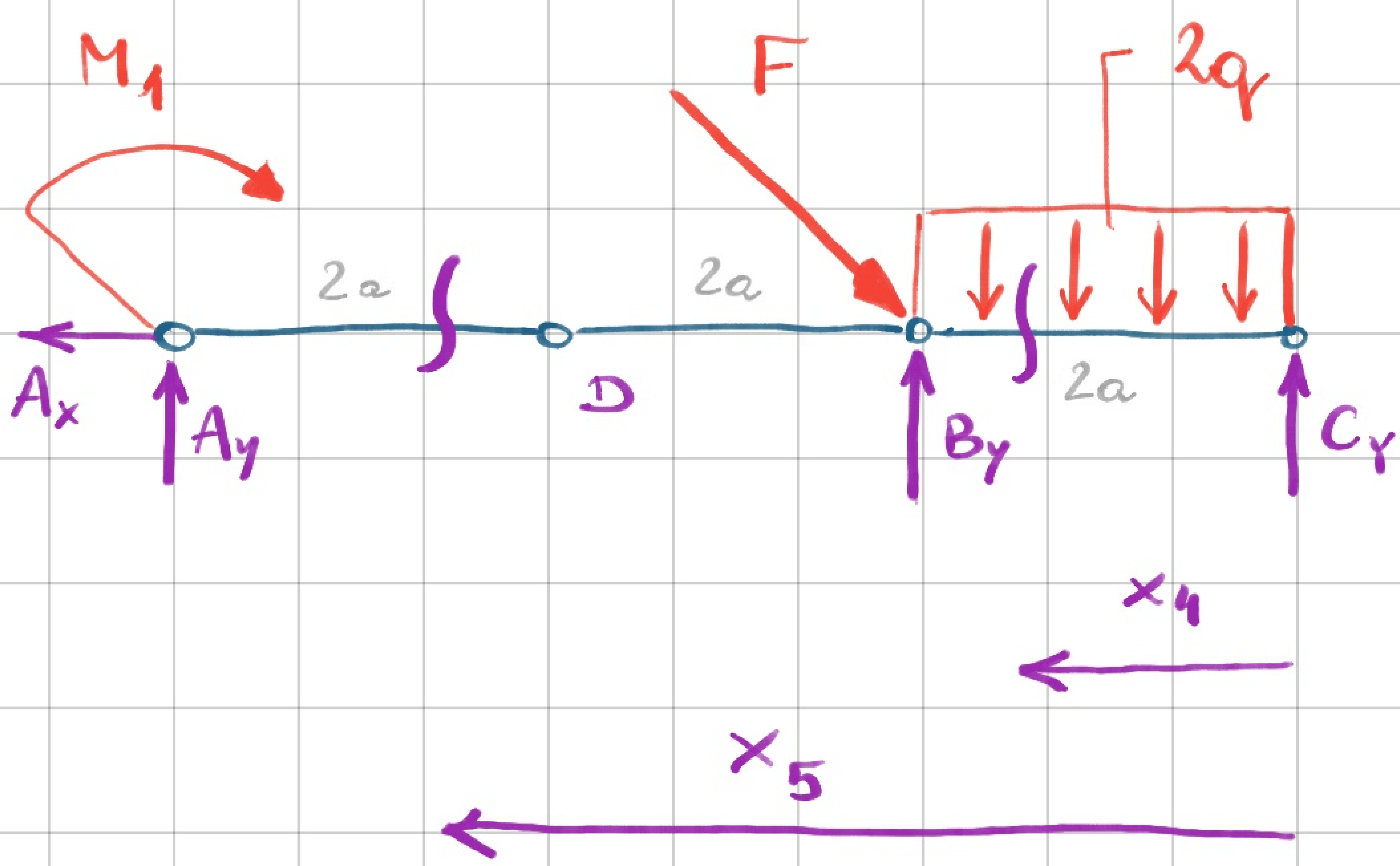
ten wynik utwierdza nas w przekonaniu, że wszystko jest w porządku

$$T^{III\,L}: \; A_y - F_1 + B_y - 2q(x_3 - 4a)$$

$$T^{III\,L}(x_3 = 4a) = -3qa - 3qa + 11qa = 5qa$$

$$T^{III\,L}(x_3 = 6a) = -3qa - 3qa + 11qa - 4qa = qa$$

Teraz dla sprawdzenia policzymy belkę od prawej strony.



Przedział I od prawej strony

$$Mg^{IP}: C_y \cdot x_4 - 2q \cdot x_4 \cdot \frac{x_4}{2} = C_y x_4 - q x_4^2$$

$$Mg^{IP}(x_4 = 0) = 0$$

$$Mg^{IP}(x_4 = 2a) = -qa \cdot 2a - 4qa^2 = -6qa^2$$

$$T^{IP}: -C_y + 2qx_4$$

Jeśli liczymy siłę tnącą od prawej strony, to zgodnie z przyjętą regułą znaku powinniśmy zmienić jej znak jako pochodnej na przeciwny

$$T^{IP}(x_4 = 0) = -C_y = qa$$

$$T^{IP}(x_4 = 2a) = qa + 4qa = 5qa$$

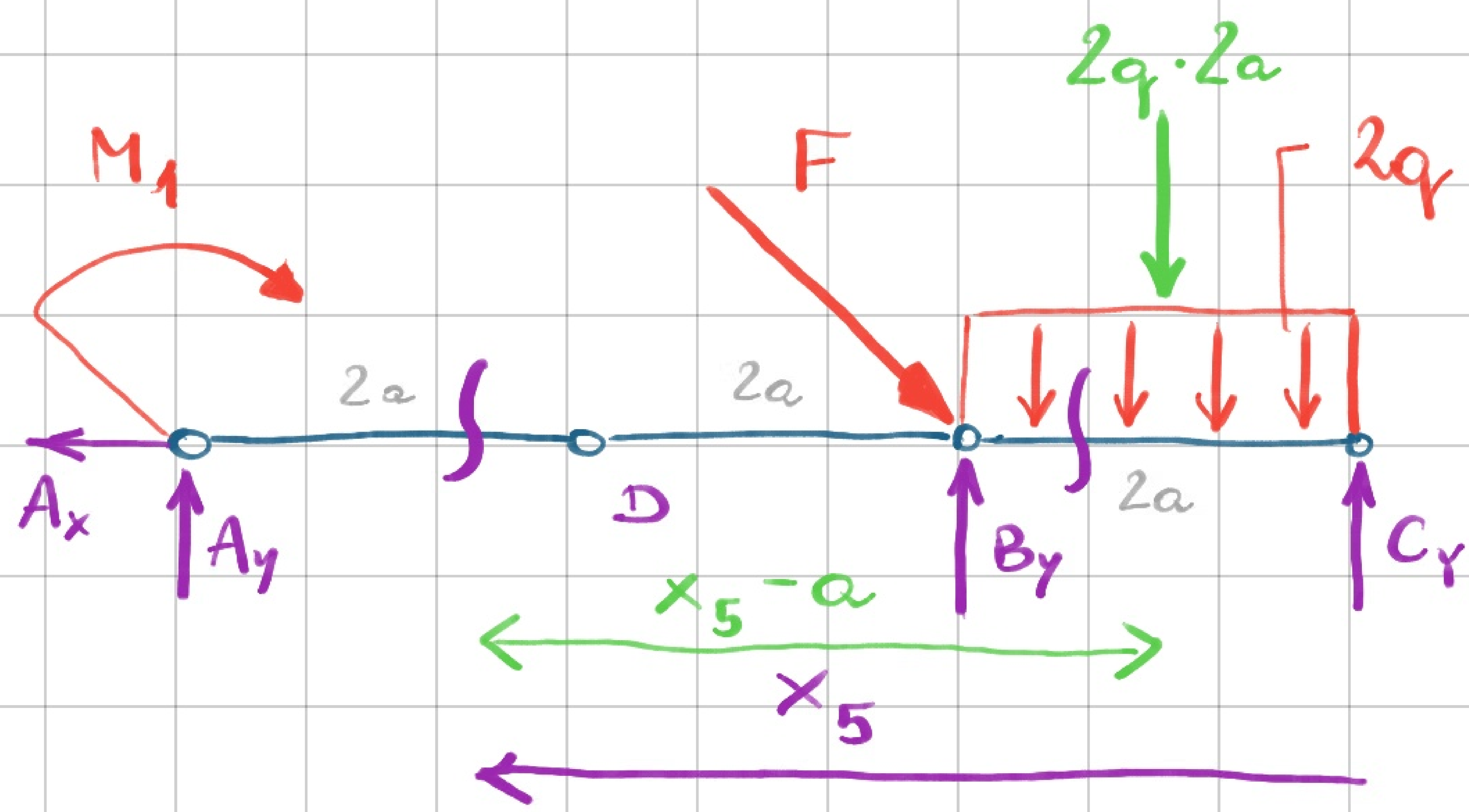
Przedział $\underline{II}$ od prawej strony:

$$Mg^{II\,P} = C_y x_5 \boxed{- 2q \cdot 2a \cdot (x_5 - a)} + B_y (x_5 - 2a) - F_y (x_5 - 2a)$$

$$Mg^{II\,P}(x_5 = 4a) = -4qa^2 - 16qa^2 + 22qa^2 - 6qa^2$$

→ moment gnący w przegubie wynosi 0, znowu potwierdzamy prawidłowość równania na moment gnący

→ Ten człon równania wymaga omówienia

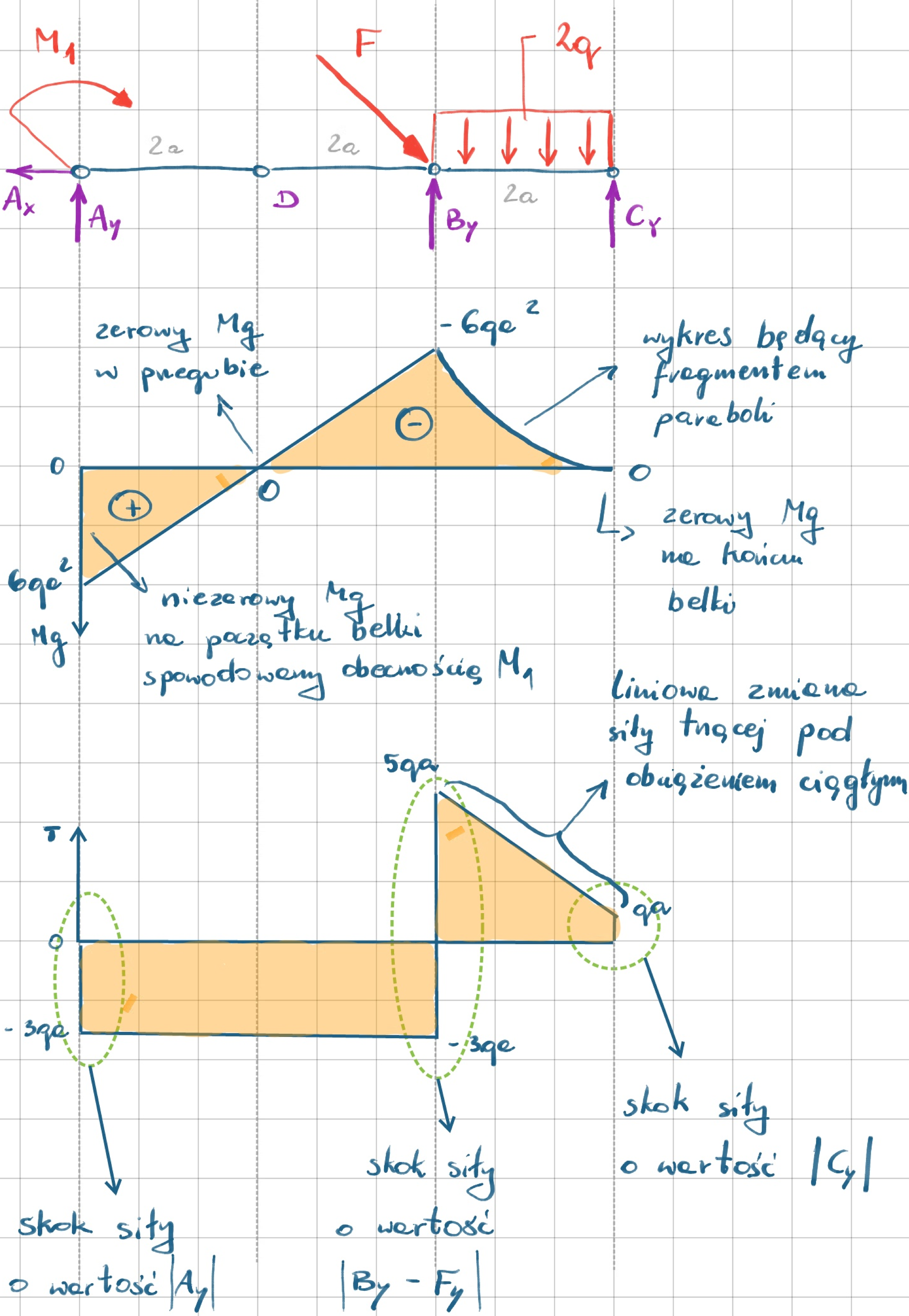


W $\underline{II}$ przedziale od prawej strony, niezależnie gdzie się znajdziemy będziemy już rozpatrywać całe obciążenie ciągłe dlatego liczymy je jako siłę $2q \cdot 2a$ działającą od punktu $x_5 = a$ czyli na ramieniu $x_5 - a$ co daje $2q \cdot 2a(x_5 - a)$

$$T^{IIP} = -C_y + 4qa - B_y + F_y$$

$$= qa + 4qa - 11qa + 3qa = -3qa$$

Jak widzimy obliczenie z lewej czy z prawej strony prowadzą do tych samych rezultatów. Należy zatem tak ułożyć przedziały, aby maksymalnie uprościć i przyspieszyć obliczenia. Można w związku z tym część belki policzyć od lewej a resztę od prawej strony.



M1
F
2q
2a
2a
2a
Ax
Ay
D
By
Cy
zerowy Mg
w pregubie
-6qa²
wykres będący
fragmentem
paraboli
0
0
0
0
6qa²
Mg
niezerowy Mg
na początku belki
spowodowany obecnością M1
zerowy Mg
na końcu
belki
liniowa zmiana
siły tnącej pod
obciążeniem ciągłym
5qa
T
qa
0
-3qa
-3qa
skok siły
o wartość |Ay|
skok siły
o wartość
|By - Fy|
skok siły
o wartość |Cy|

Kilka prawidłowości:

- M_g na końcu i początku belki jest zerowy, chyba, że jest to belka utwierdzona lub jest tam przyłożony moment skupiony
- T jest stała w przedziałach bez obciążenia ciągłego a jeśli ono występuje, to T zmienia się liniowo
- między przedziałami pojawiać się będą skoki wartości siły tnącej o wartości równej wartości siły skupionej na granicy przedziału (obciążenia lub siły reakcji)
- siła tnąca liczona od prawej strony jako pochodna z momentu gnącego zmienia dodatkowo znak na przeciwny