BELKI

Belką nazywamy pręt o przekroju przazmatycznym, obciążony siłami poprzecznymi.
Zakładamy, że belki (podobnie jak wcześniej kratownice) obowiązuje stałość geometryczna oraz nieważkość.

Belka może być swobodnie podparta lub osadzona.
W związku z tym, w miejscu więzów, pojawiają się reakcje, które należy wyznaczyć.

Podobnie jak w przypadku kratownic należy określić czy belka jest statycznie wyznaczalna.

Dla belek połączonych przegubem / przegubami

$$3n - r = 0$$

n - liczba belek
r - liczbe reakcji

Dla pojedynczej belki swobodnie podpartej mamy wobec tego 3 reakcje, do wyznaczenia których potrzebujemy 3 równań równowagi.

Stałości geometryczne oznacza, że belka nie może, pod wpływem działających obciążeń doznawać przemieszczeń. Należy zadbać o to, żeby:

- liczba podpór była wystarczająca, co wyeliminuje możliwość powstania mechanizmu
- pojawią się podpory stałe, co wyeliminuje ruch translacyjny

SIŁY WEWNĘTRZNE W BELCE

Po myślowym przecięciu belki i odrzuceniu części przekroju, część druga pozostanie w równowadze jeśli brakującą część zastąpimy układem sił.

Rodzaje sił wewnętrznych:

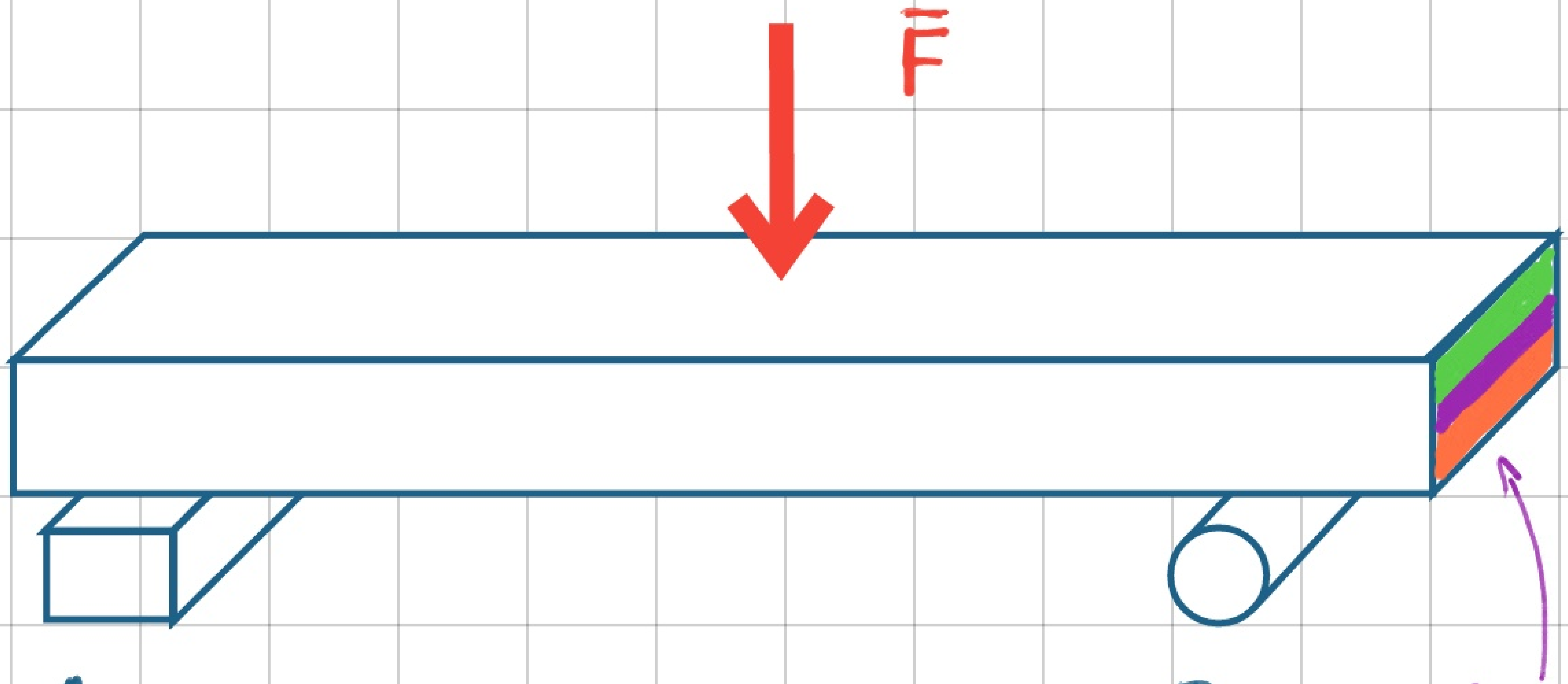
- siła tnąca - siła poprzeczna do osi belki w punkcie przekroju
- siła normalna - siła równoległa do osi belki w punkcie przekroju
- moment gnący - prostopadły do płaszczyzny działania obciążeń

Siła poprzeczna i normalna zapobiegają, odpowiednio, przesunięciu poprzecznemu i wzdłużnemu pozostawionej części przekroju.
Moment gnący zapobiega obrotowi pozostawionej części przekroju.

W celu wyznaczenie w/w sił wewnętrznych niezbędny jest podział belki na tzw. PRZEDZIAŁY.
Przedział, to fragment belki, w którym moment gnący da się zapisać za pomocą jednego równania.

Granice przedziału wyznacza:
- początek i koniec belki
- punkt przyłożenia siły skupionej i momentu gnącego
- początek i koniec obciążenia ciągłego

Przegub sam w sobie nie stanowi przyczynku dla tworzenia granicy przedziału. Natomiast, ze względu na fakt, że nie przenosi momentu gnącego, to stanowi dobry punkt do weryfikacji poprawności równania na moment gnący. W przegubie wartość momentu gnącego wynosi zawsze zero.



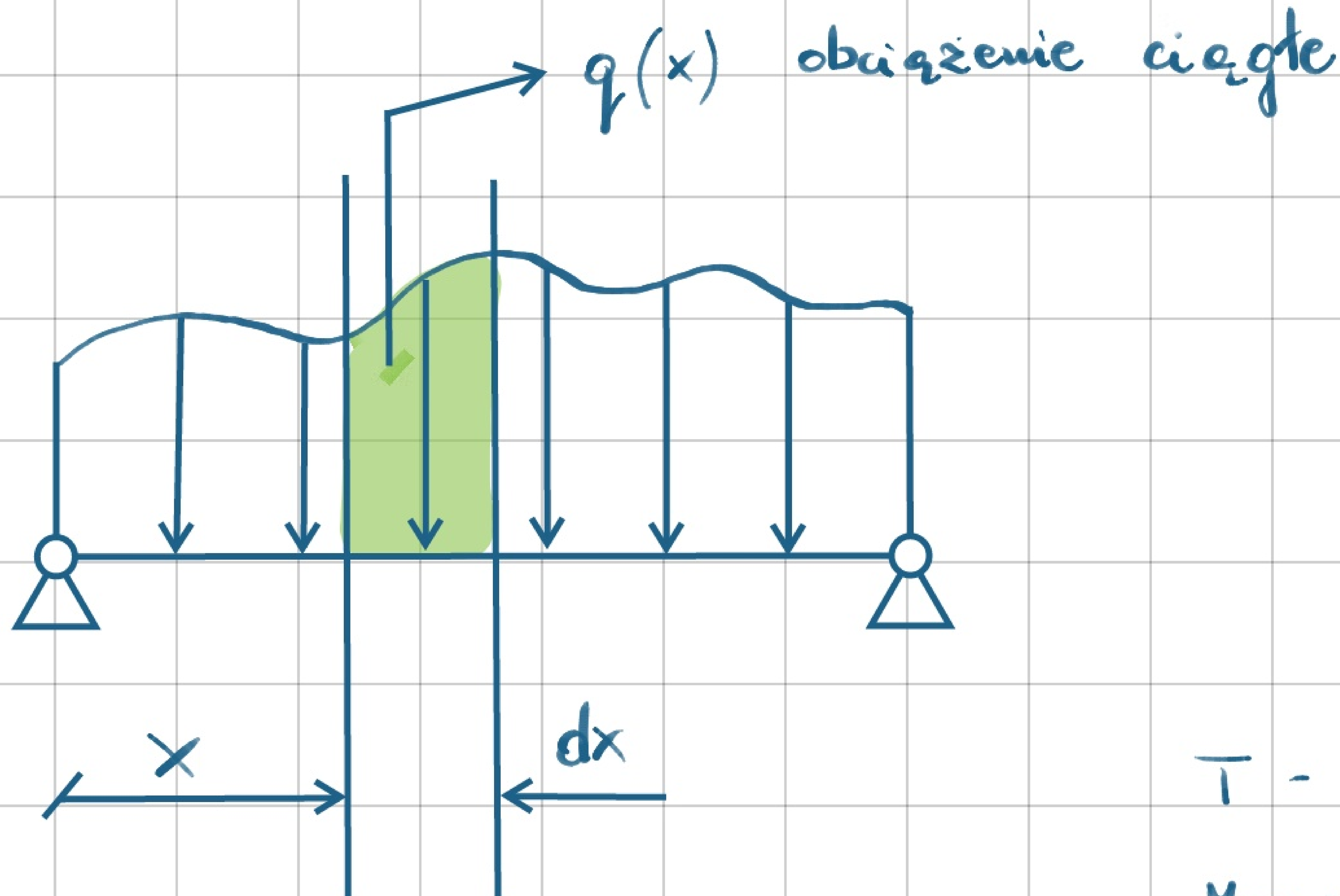
A - podpora stała

B - podpora przesuwna

W belkach, którymi się zajmiemy nie będziemy rozpatrywać tych efektów, chociaż będziemy wyróżniać stronę rozciąganą - pomoże nam to w identyfikacji znaku momentu gnącego.

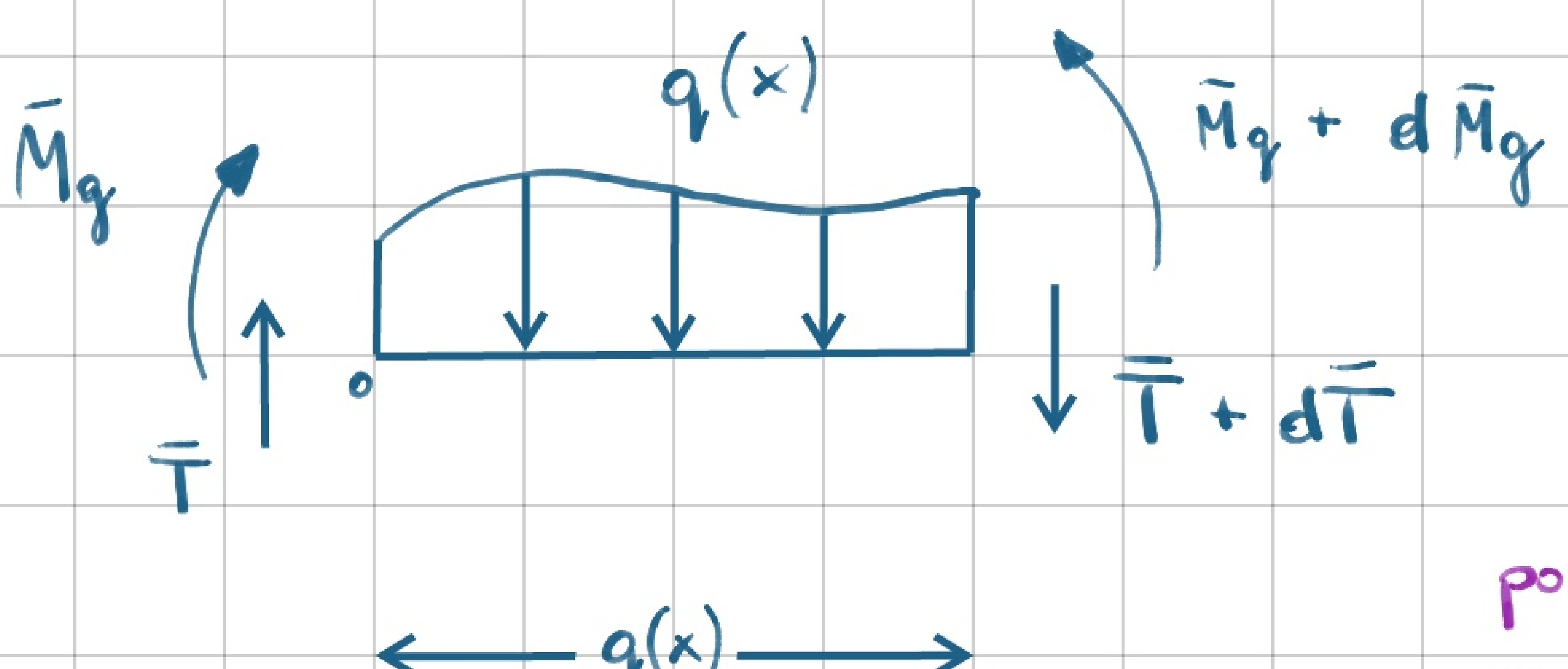
TWIERDZENIA SZWEDLERA

Twierdzenia Szwedlera - określają związek różniczkowy między obciążeniami zewnętrznymi a siłami wewnętrznymi w belce.



T - siła tnąca

M_g - moment gnący



pomijamy wielkości małe II-go rzędu

$$M_g + \boxed{q(x)\,dx\,\frac{dx}{2}} + T\,dx + \boxed{dT\,dx} - M_g - dM_g = 0$$

$$T\,dx = dM_g \qquad T = \frac{dM_g}{dx}$$

$$\frac{dM_g}{dx} = T$$

I Twierdzenie Szwedlera

Pochodna momentu gnącego wzdłuż osi belki jest równa sile tnącej.

Jeśli zrzutujemy siły na kierunek pionowy:

$$T - q(x)\,dx - T - dT = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = -q(x)$$

II Twierdzenie Szwedlera

Pochodna siły tnącej wzdłuż osi belki jest równa obciążeniu ciągłemu z przeciwnym znakiem.

OBLICZENIA W BELCE

- sprawdzić wyznaczalność
- wyznaczyć reakcje i sprawdzić je
- wydzielić przedziały w belce
- wyznaczyć siły (normalne i tnące) i moment gnący
- przygotować wykresy wyznaczonych wielkości

Obciążenia w belce będziemy definiować następująco:

$q\left[\frac{N}{m}\right]$ - dla obciążenia ciągłego

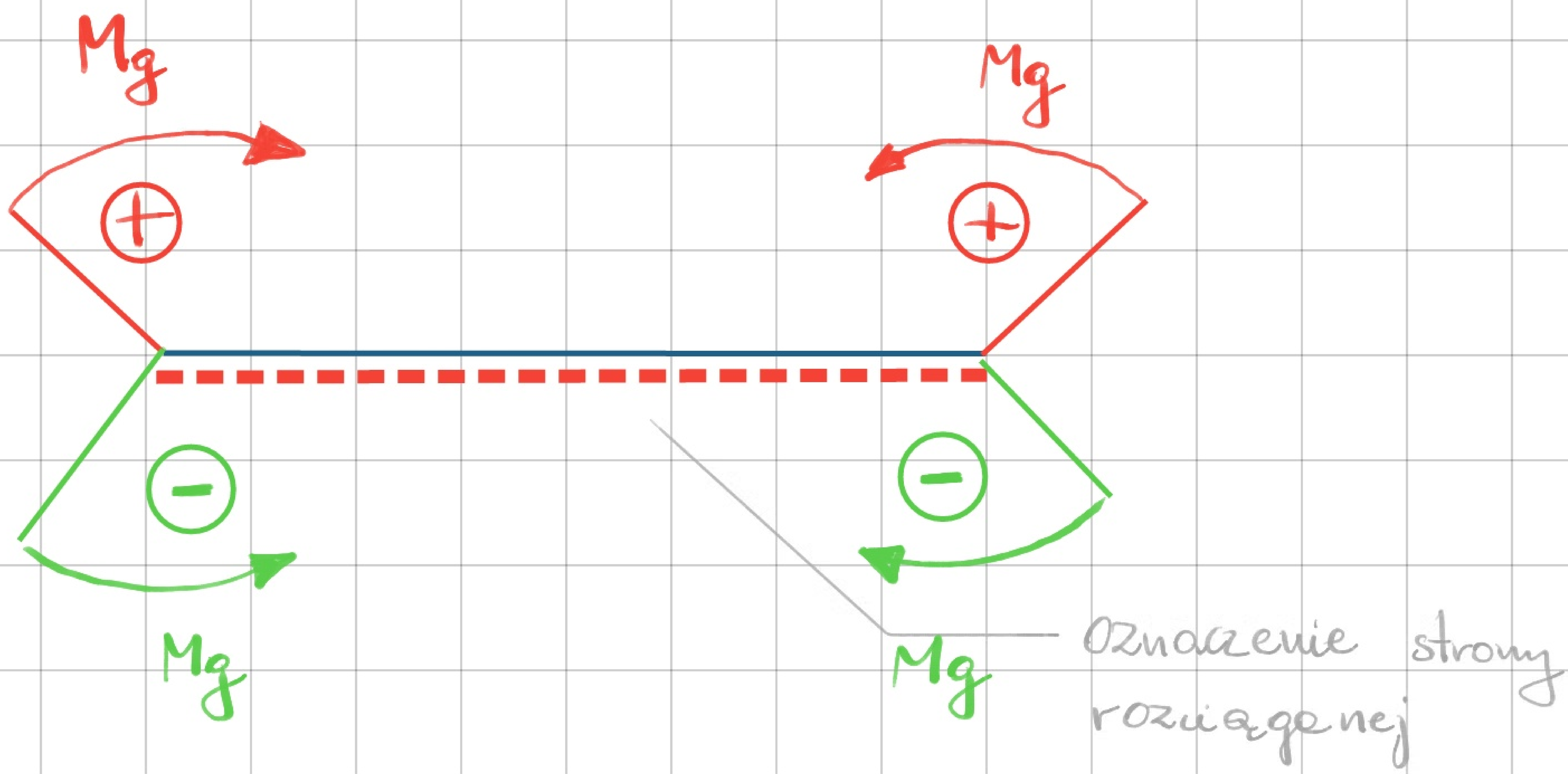
$qa\left[\frac{N}{m}\cdot m\right]$ - dla sił skupionych

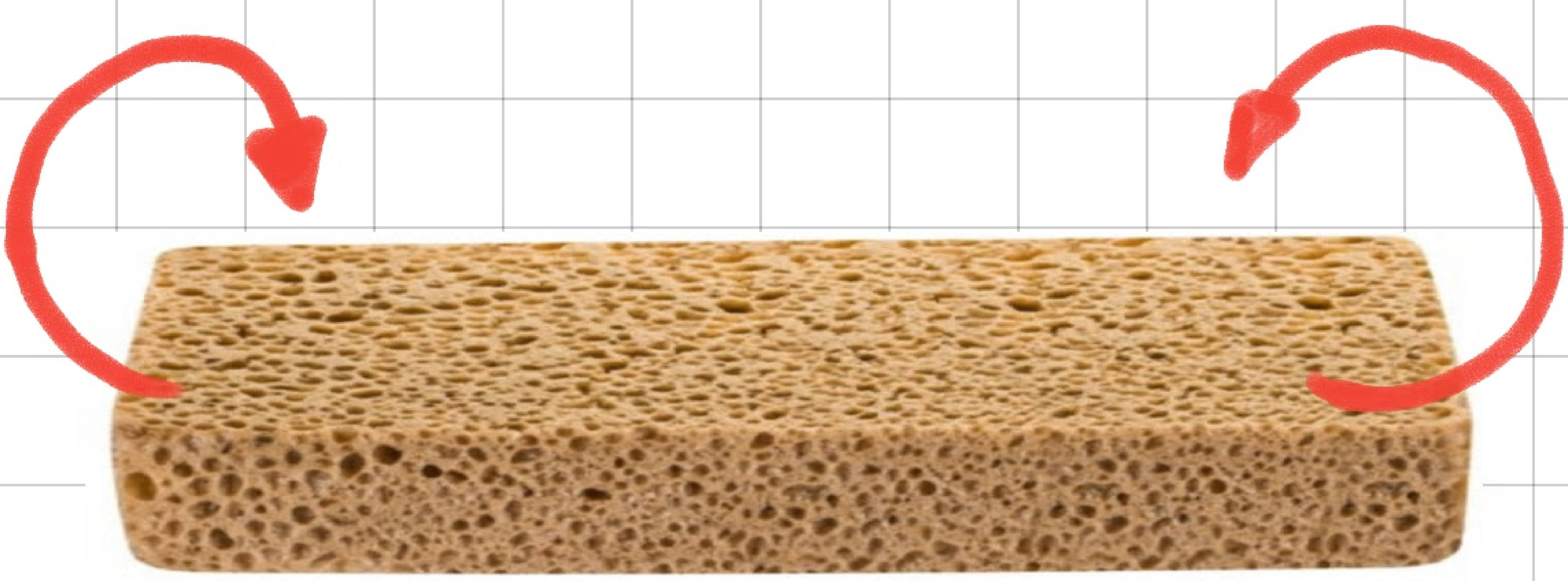
$qa^2\left[\frac{N}{m}\cdot m^2\right]$ - dla momentów skupionych

Pozwoli to na kontrolę obliczeń nie tylko na poziomie ilościowym, ale także jakościowym.

REGUŁA ZNAKU

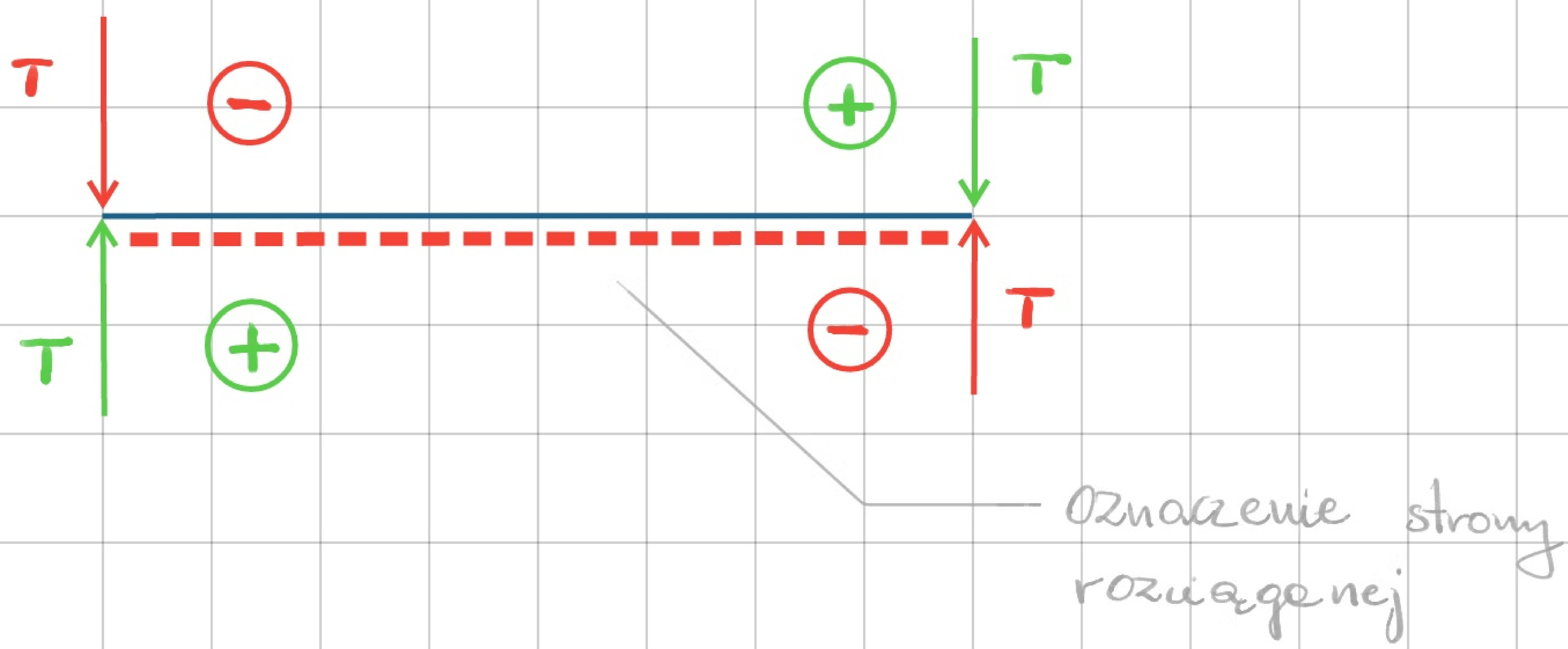
W belce definiujemy stronę spodnią belki jako tę, która będzie pod wpływem działających obciążeń rozciągana. Jeśli tak jest, to moment gnący tak działający definiujemy jako dodatni.





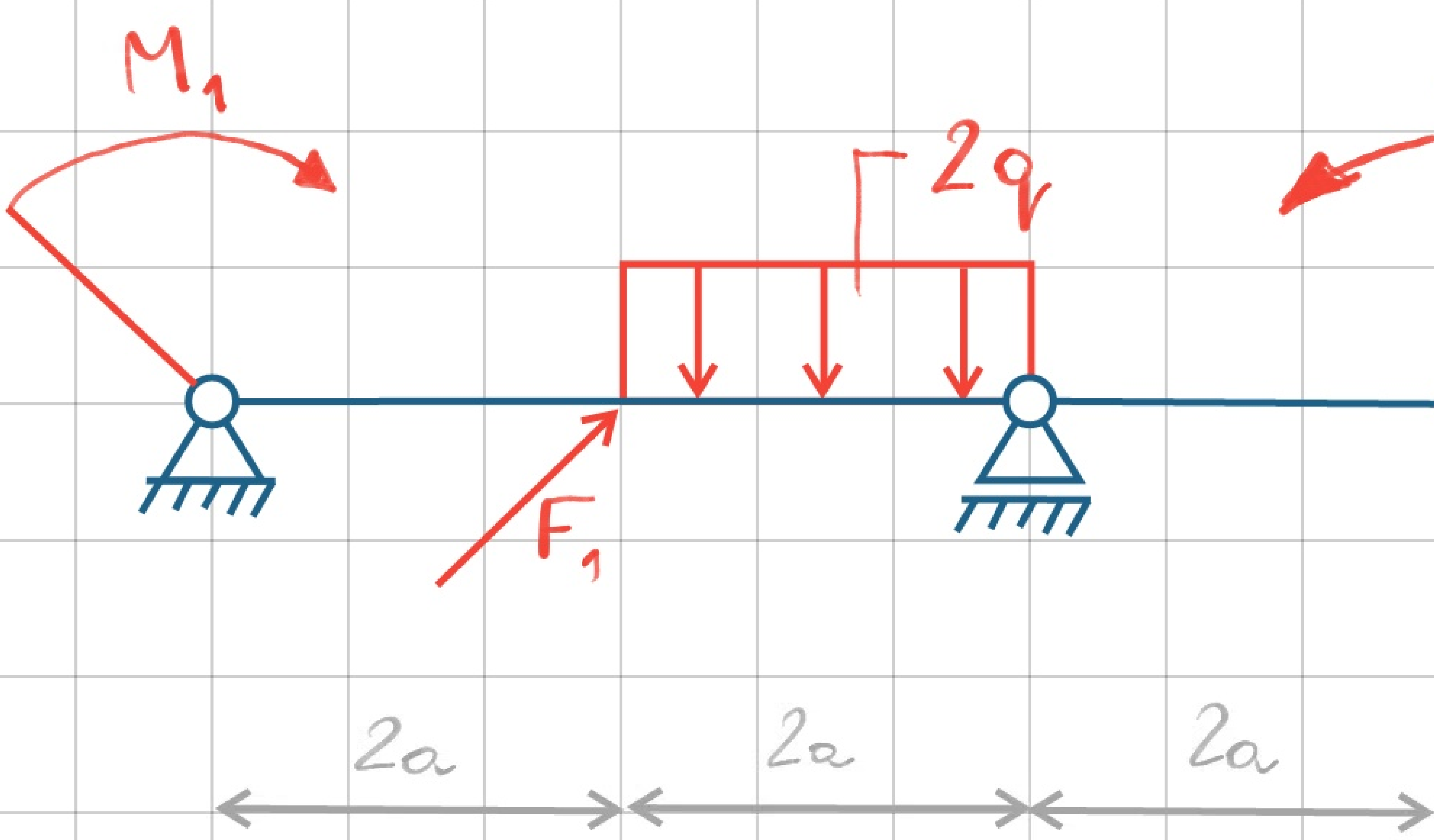
Jeśli zaczniecie gąbkę np. kuchenną skręcać w sposób pokazany na rysunku, to pory na jej spodzie rozciągną się – to będzie znak, że taka orientacja momentu powoduje, że określamy go jako dodatni.

Siły tnące definiujemy na podobnej zasadzie, ale pojawia się jeszcze wpływ strony, z której rozpoczynamy analizę.



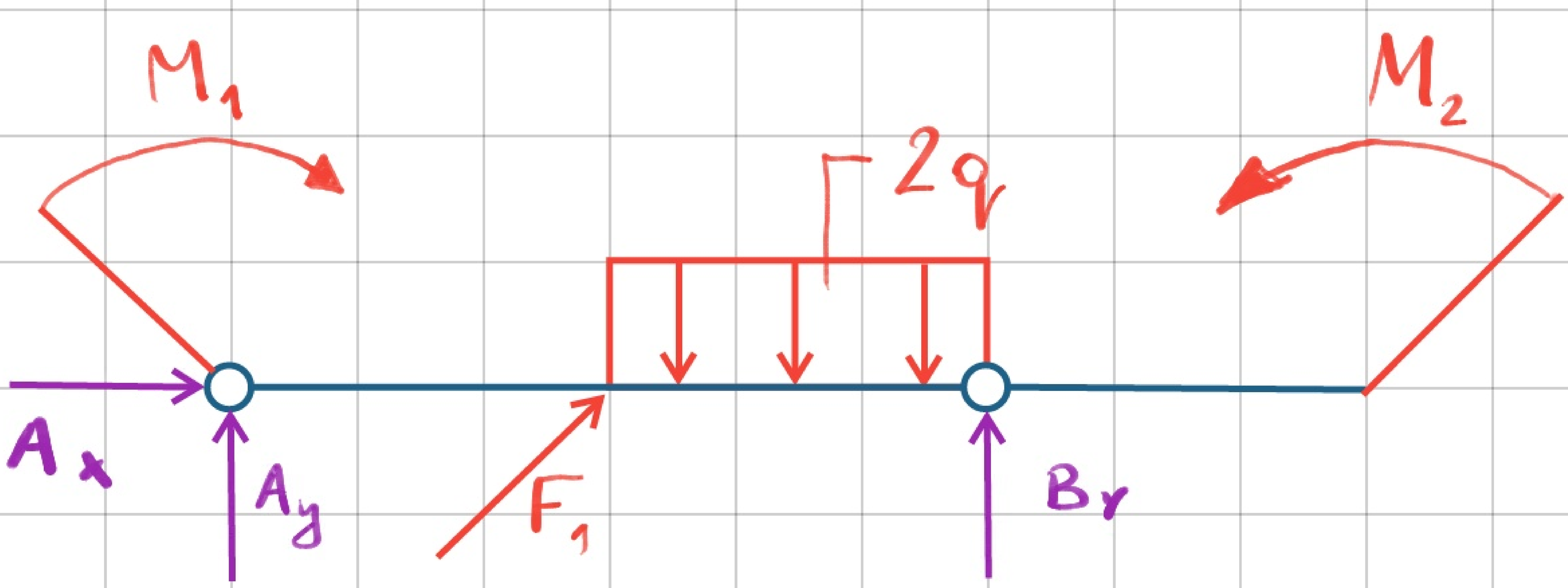
Siła tnąca działająca od dołu od lewej strony określana jest jako dodatnia, z góry od lewej ujemna. Od prawej strony jest odwrotnie.

Dla przedstawionej belki wyznacz momenty gnące oraz siły tnące i normalne.



$M_1 = 5qa^2$
$M_2 = 3qa^2$
$F_1 = 2\sqrt{2}qa$

SPRAWDZENIE WYZNACZALNOŚCI



$$3n - r = 0$$

$n = 1$ (1 belka)
$r = 3$ (3 reakcje)

Belka jest wyznaczalna.

WYZNACZENIE REAKCJI

obciążenie zastępcze obciążenia ciągłego

$$\Sigma F_{ix}: \quad A_x + F_{1x} = 0$$

$$\Sigma F_{iy}: \quad A_y + F_{1y} - 2q \cdot 2a + B_y = 0$$

$$\Sigma M_i^A: \quad M_1 - F_{1y} \cdot 2a + 2q \cdot 2a \cdot 3a - B_y \cdot 4a - M_2 = 0$$

$$A_x = -F_{1x} = 2\sqrt{2}\,qa \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2qa$$

$$\frac{M_1}{a} - 2F_{1y} + 12qa - 4B_y - \frac{M_2}{a} = 0$$

$$5qa - 2 \cdot 2qa + 12qa - 3qa = 4B_y$$

$$B_y = 2{,}5\,qa$$

$$A_y = 4qa - F_{1y} - B_y = -0{,}5qa$$

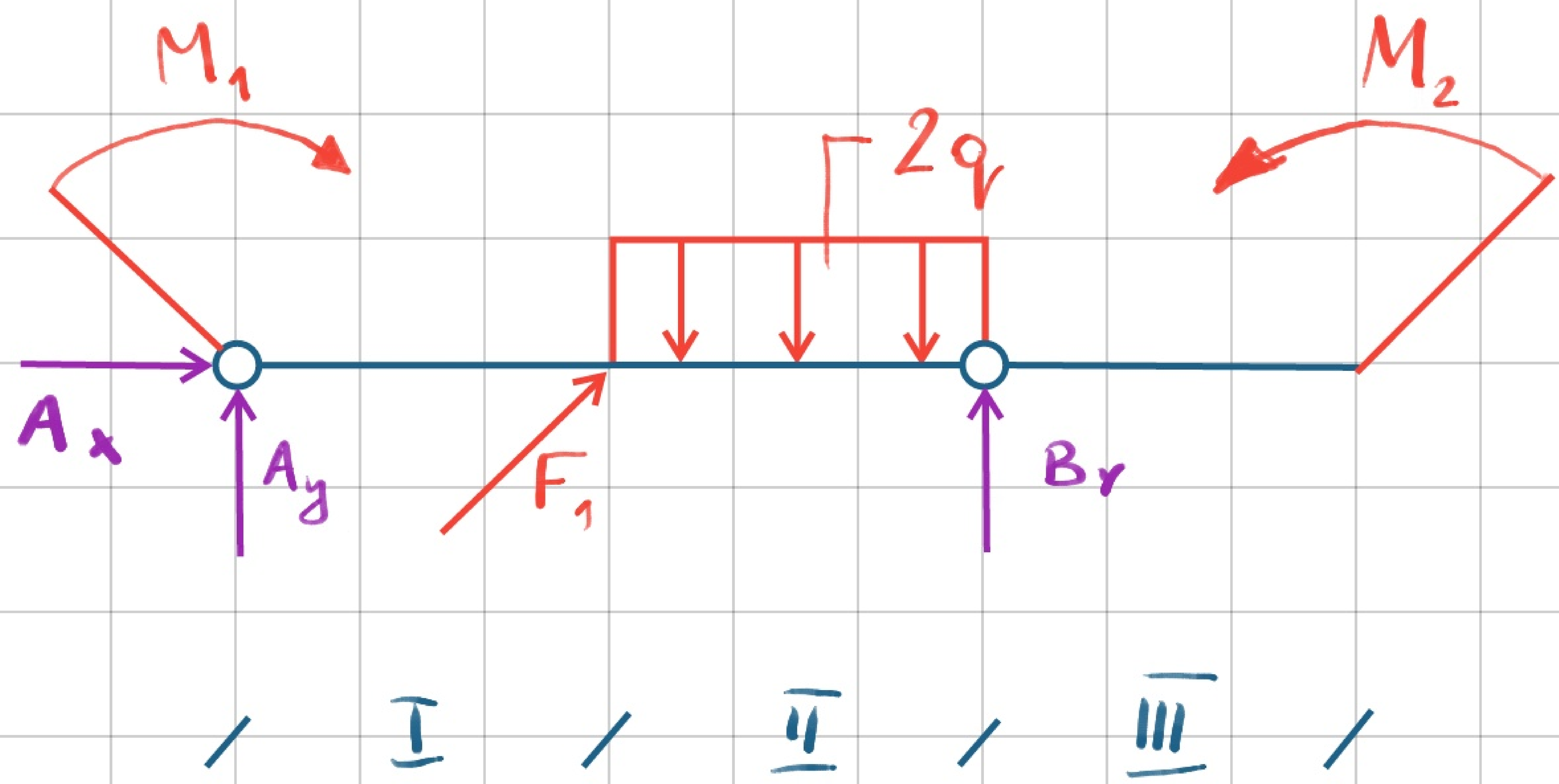
SPRAWDZENIE REAKCJI

$$\Sigma M_i^C: \quad M_1 + A_y \cdot 6a + F_{1y} \cdot 4a - 2q \cdot 2a \cdot 3a + B_y \cdot 2a - M_2 = 0$$

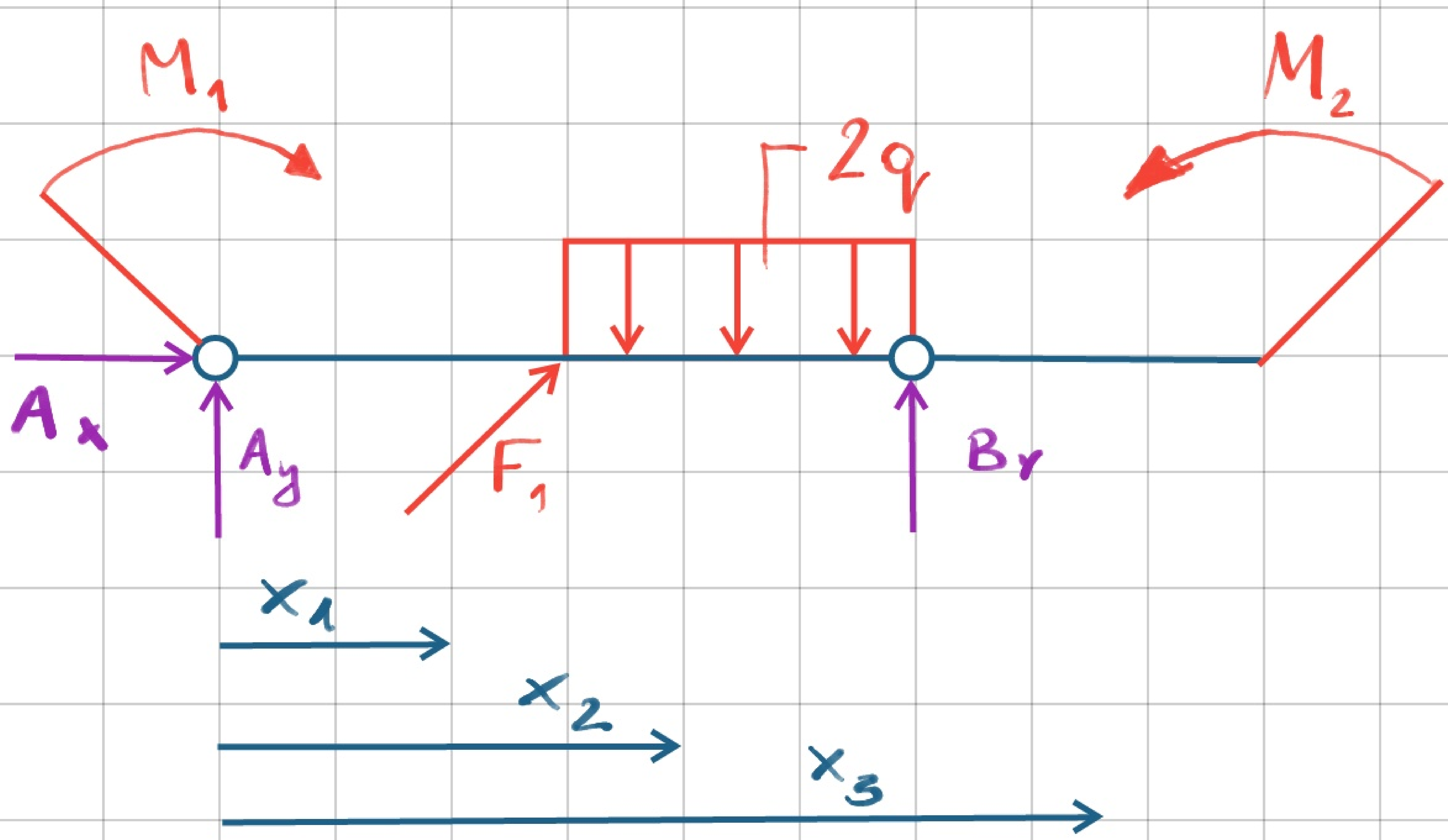
$$5qa^2 - 3qa^2 + 8qa^2 - 12qa^2 + 5qa^2 - 3qa^2 = 0$$

WYZNACZENIE PRZEDZIAŁÓW

W belce istnieją trzy przedziały.



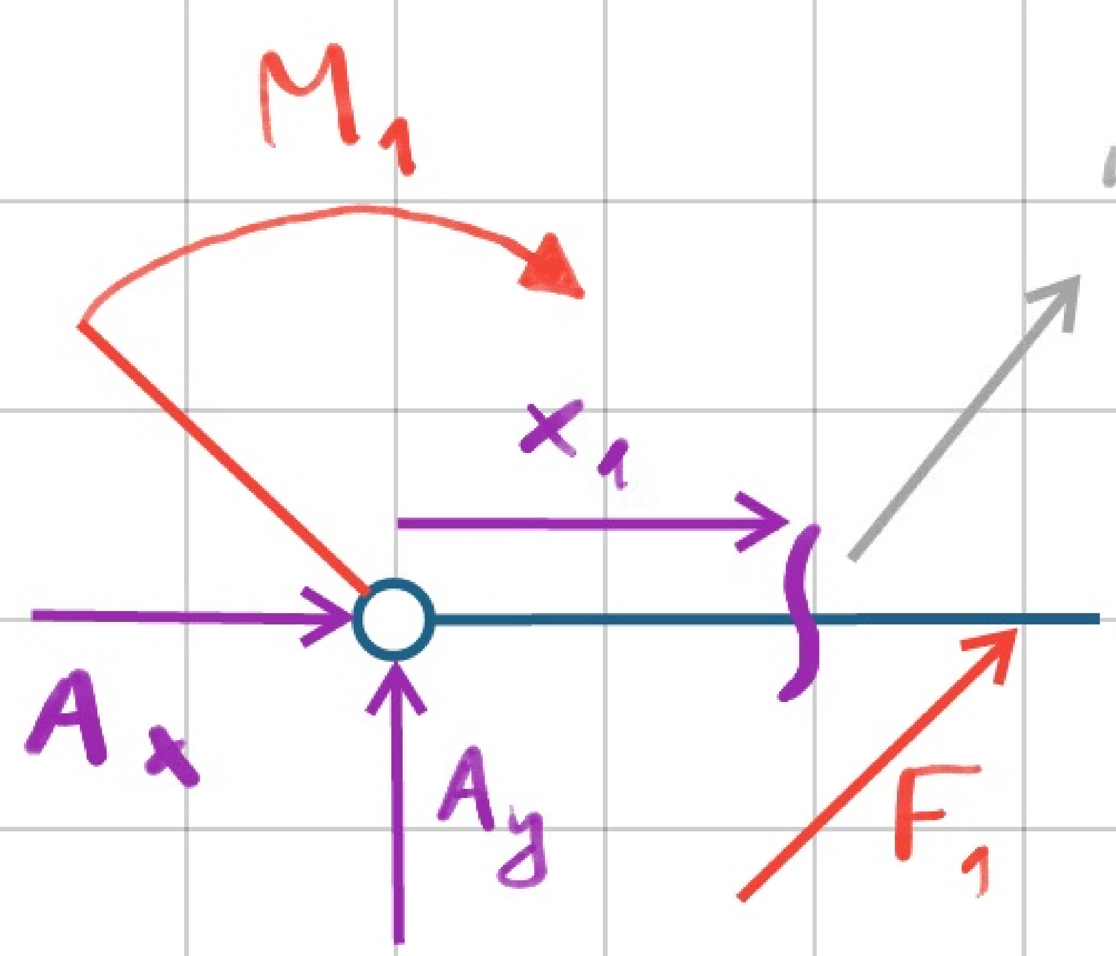
Od lewej strony: I przedział od 0 do 2a
II przedział od 2a do 4a
III przedział od 4a do 6a



x_i to ramię do wyznaczenia momentu zginającego powstającego od poszczególnych sił

ramię x_i mieści się w granicach i-tego przedziału ; nie przyjmuje ono jakiejś konkretnej długości tylko każdą możliwą w granicach przedziału

I przedział od lewej strony



w tym miejscu myślowo przecinamy belkę i w tym miejscu liczymy siły tnące, normalne i momenty gnące

Znajdujemy się w miejscu $\int$ i patrzymy od lewej strony na siły i momenty jakie działają od początku belki do miejsca rozkroju belki.

$$Mg^{I} = M_1 + A_y x_1$$ ✓

Pamiętajmy, że moment skupiony M_1 nie potrzebuje już ramienia. Pomocne są tu właśnie jednostki. Gdybyśmy napisali równanie

$$Mg^{I} = M_1 x_1 + A_y x_1$$ ✗

$$\Downarrow$$

$$qa^2 \cdot a = qa^3 \quad \text{czyli} \quad \frac{N}{m} \cdot m^3 = Nm^2$$

nie jest to jednostka momentu gnącego

$$Mg^{I} = M_1 + A_y x_1$$

$$Mg^{I}(x_1 = 0) = 5qa^2 + (-0{,}5qa) \cdot 0 = 5qa^2$$

$$Mg^{I}(x_1 = 2a) = 5qa^2 + (-0{,}5qa) \cdot 2a = 4qa^2$$

Równanie na Mg^{I} jest równaniem liniowym. Wystarczy zatem obliczyć wartość Mg na granicach. Widzimy, że wartości mają wymiar qa^2 czyli właściwy dla momentu gnącego właśnie.

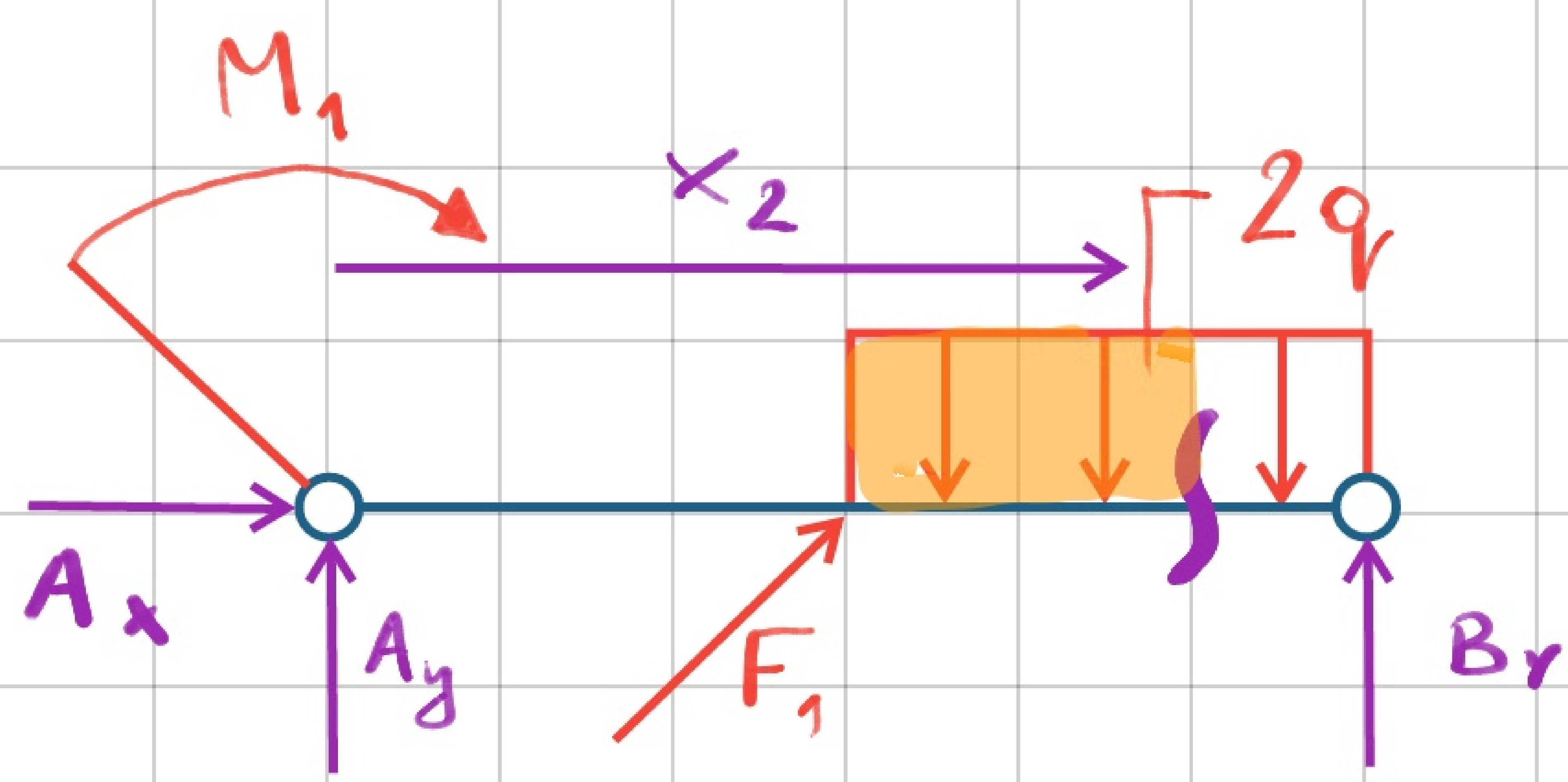
Siłę tnącą liczymy, zgodnie z I Tw. Szwedlera, jako pochodną momentu gnącego.

$$T = \frac{dMg}{dx}$$

$$T^{I} = A_y$$

widzimy, że w ramach przedziału wartość siły tnącej jest stała i wynosi $A_y = -0,5qa$

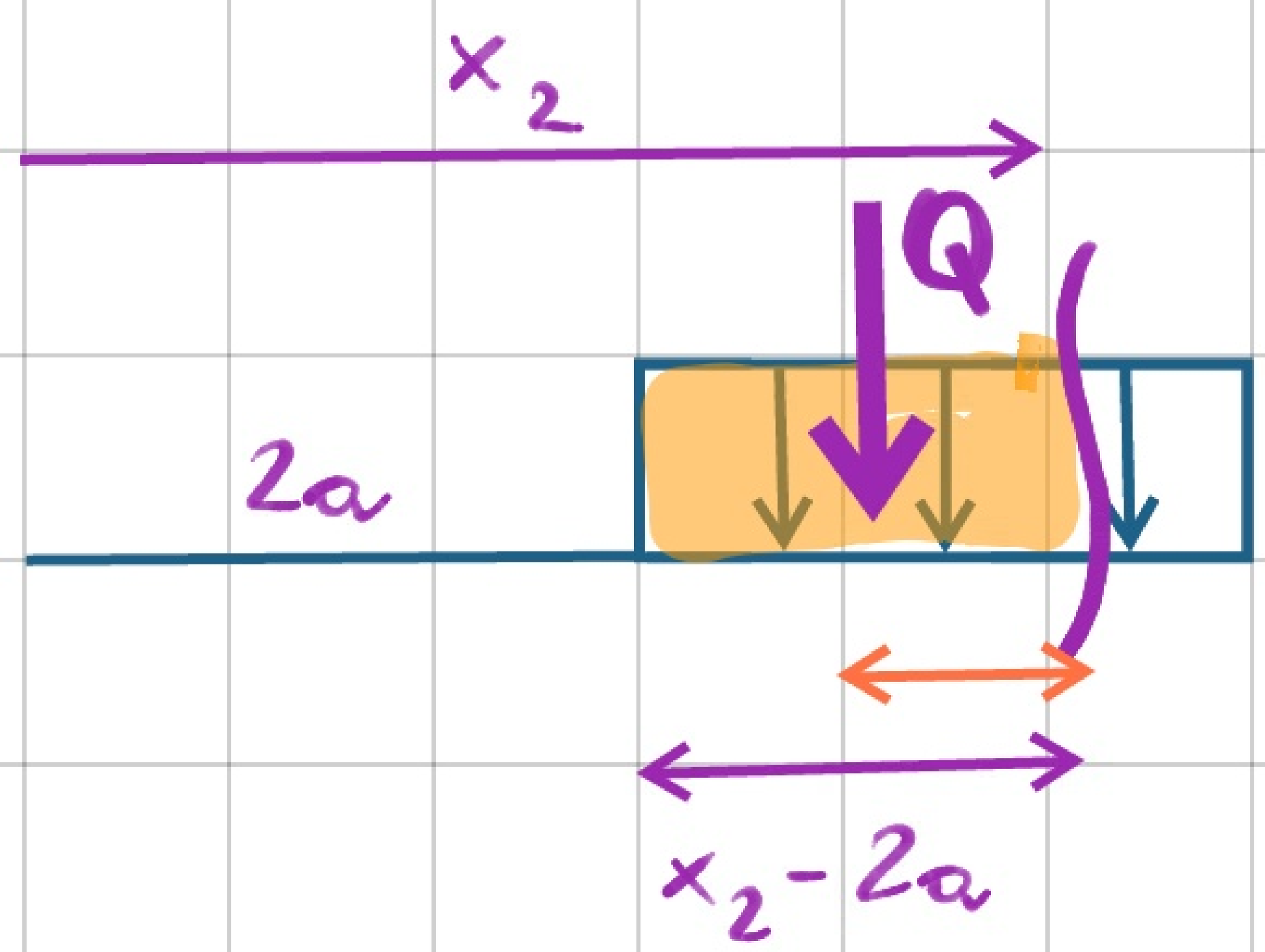
<u>II</u> przedział od lewej



$$Mg^{II} = M_1 + A_y x_2 + F_{1y}(x_2 - 2a) - 2q(x_2 - 2a)\left(\frac{x_2 - 2a}{2}\right)$$

w miejscu cięcia wpływ siły A_y obowiązuje w pełnym przebiegu, siły F_{1y} działa dopiero po przebyciu $2a$ od początku belki, obciążenie ciągłe $2q$ działa z góry stąd daje moment gnący ujemny

$$-2q\left(x_2-2a\right)\left(\frac{x_2-2a}{2}\right)$$



Q - obciążenie zastępcze za obciążenie ciągłe działające na fragmencie $(x_2 - 2a)$;
obciążenie ciągłe było równomierne stąd położenie siły Q będzie centralne na środku odcinka $(x_2 - 2a)$;
mamy zatem siłę a ramię ⟷ na jakim działa ta siła to $\left(\frac{x_2-2a}{2}\right)$ czyli połowa odcinka na którym 2q działa

W skróconym zapisie:

$$M_g^{II} = M_1 + A_y x_2 + F_{1y}\left(x_2-2a\right) - q\left(x_2-2a\right)^2$$

$$T^{II} = A_y + F_{1y} - 2q\left(x_2-2a\right)$$

Siła tnąca tym razem jest zapisana równaniem liniowym, zależnym od współrzędnej x_2.

$$M_g^{II}(x_2 = 2a) = 5qa^2 + (-0{,}5qa)\cdot 2a = 5qa^2 - qa^2 = 4qa^2$$

$$M_g^{II}(x_2 = 4a) = 5qa^2 + (-0{,}5qa)\cdot 4a + 2qa(4a - 2a) - q(4a-2a)^2 = 5qa^2 - 2qa^2 + 4qa^2 - 4qa^2 = 3qa^2$$

Moment gnący zapisany jest równaniem kwadratowym, zatem jego wykres będzie fragmentem paraboli.

$$T^{II}(x_2 = 2a) = -0{,}5qa + 2qa = 1{,}5qa$$

$$T^{II}(x_2 = 4a) = -0{,}5qa + 2qa - 4qa = -2{,}5qa$$

Jak widać siła tnąca zmienia się liniowo i jej wykres przetnie oś w miejscu:

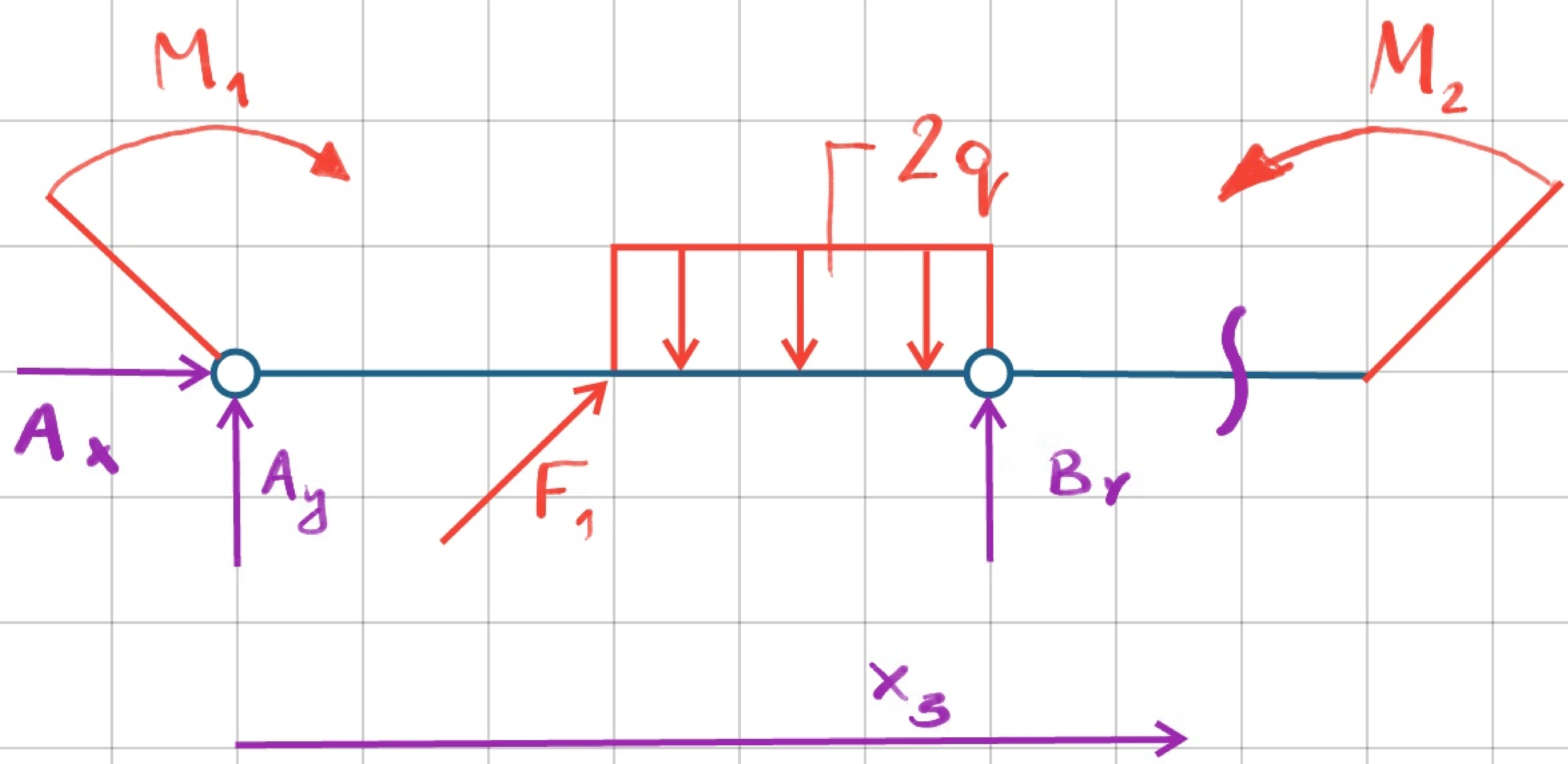
$$A_y + F_{1y} - 2q(x_2 - 2a) = 0$$
$$-0{,}5qa + 2qa - 2qx_2 + 4qa = 0$$
$$-2qx_2 = -5{,}5qa$$
$$\underbrace{x_2 = 2{,}75a}$$

→ wrócimy do tego podczas rysowania wykresu

W miejscu, w którym w wykres siły tnącej przecina oś, moment gnący ma swoje ekstremum (minimum lub maksimum)

$$M_g^{II}(x_2 = 2{,}75a) = 5qa^2 + (-0{,}5qa)\cdot 2{,}75a + 2qa(2{,}75a - 2a) - q(2{,}75a - 2a)^2 = 4{,}5625qa^2$$

III przedział od lewej



$$M_g^{III} = M_1 + A_y x_3 + F_{1y}(x_3 - 2a) - 2q\cdot 2a(x_3 - 3a) + B_y(x_3 - 4a)$$

$$T^{III} = A_y + F_{1y} - 2q\cdot 2a + B_y$$

$$5 - 3 + 8 - 12 + 5$$

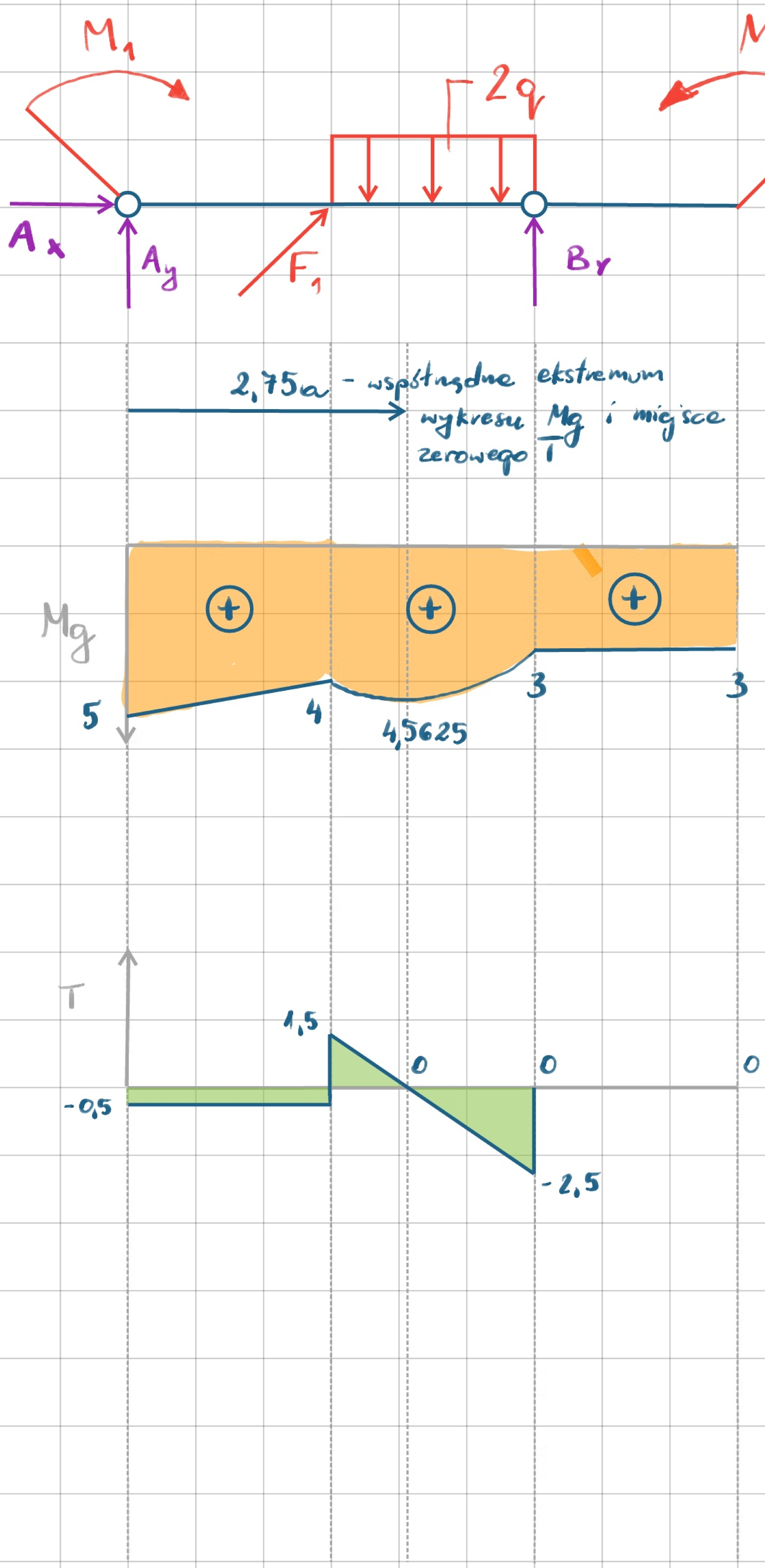
W III przedziale moment opisany jest równaniem liniowym, wystarczy policzyć wartości na krańcach przedziału. Siła tnąca będzie mieć wartość stałą.

$$M_g^{III}(x_3 = 4a) = 5qa^2 + (-0,5qa)\cdot 4a + 2qa(4a-2a) - 2q\cdot 2a(4a-3a) = 3qa^2$$

$$M_g^{III}(x_3 = 6a) = 5qa^2 + (-0,5qa)\cdot 6a + 2qa(6a-2a) - 2q\cdot 2a(6a-3a) + 2,5qa(6a-4a) = 3qa^2$$

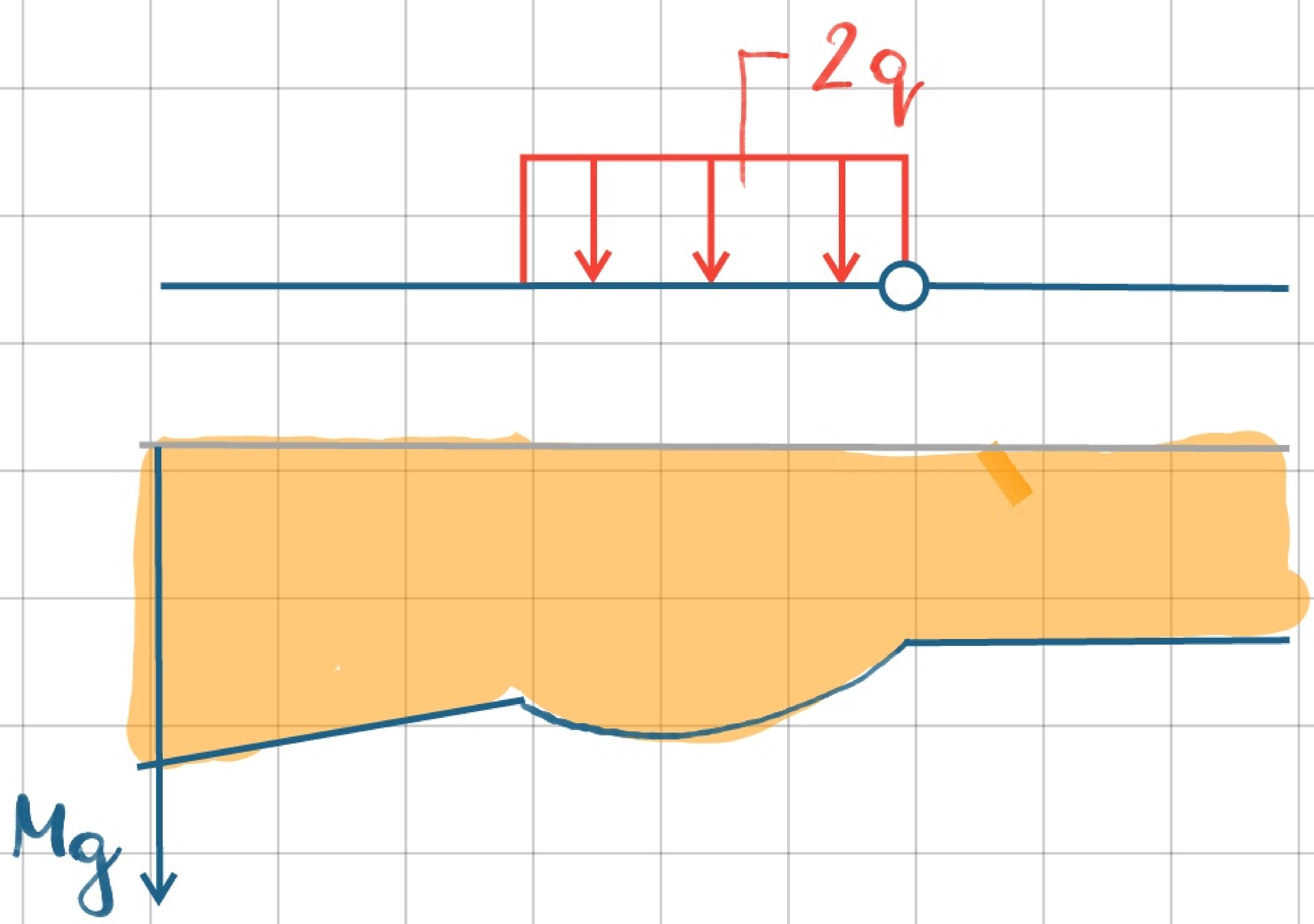
$$T^{III} = -0,5qa + 2qa - 4qa + 2,5qa = 0$$

Teraz mając już zdefiniowane przedziały, policzone reakcje, wartości sił tnących oraz momentów gnących możemy przejść do naszkicowania wykresów tych wielkości.



M1
M2
2q
Ax
Ay
F1
By
2,75a - współrzędne ekstremum wykresu Mg i miejsce zerowego T
Mg
5
4
4,5625
3
3
T
1,5
0
0
0
-0,5
-2,5

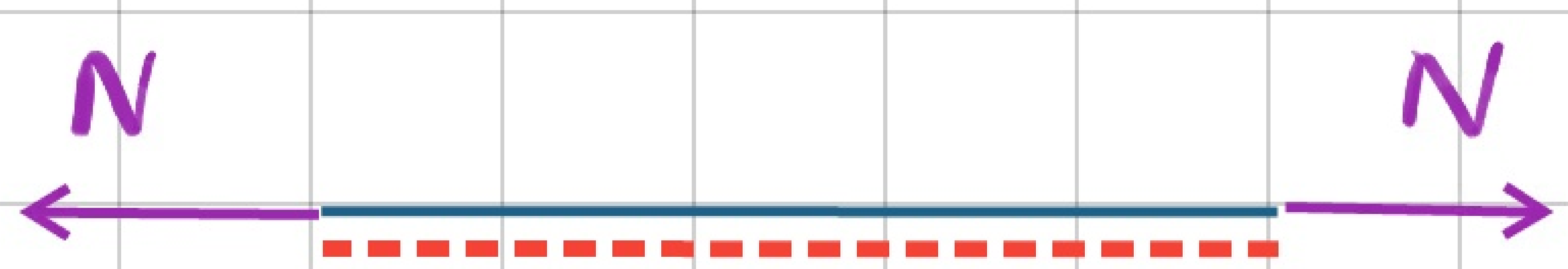
Wykres momentu gnącego rysujemy z osią dodatnią skierowaną w dół. W ten sposób także orientujemy ramiona paraboli dla tej części wykresu, która dotyczy obciążenia ciągłego.
Można tu także posłużyć się prostą analogią do żagla. Jeśli obciążenie ciągłe wyobrazimy sobie jak wiatr, który dmie w żagiel, to żagiel jako wykres będzie wydęty zgodnie z kierunkiem wiatru. Analogia ta działa dla naszej konwencji znaku tylko wtedy gdy oś dodatnia Mg skierowana jest w dół.

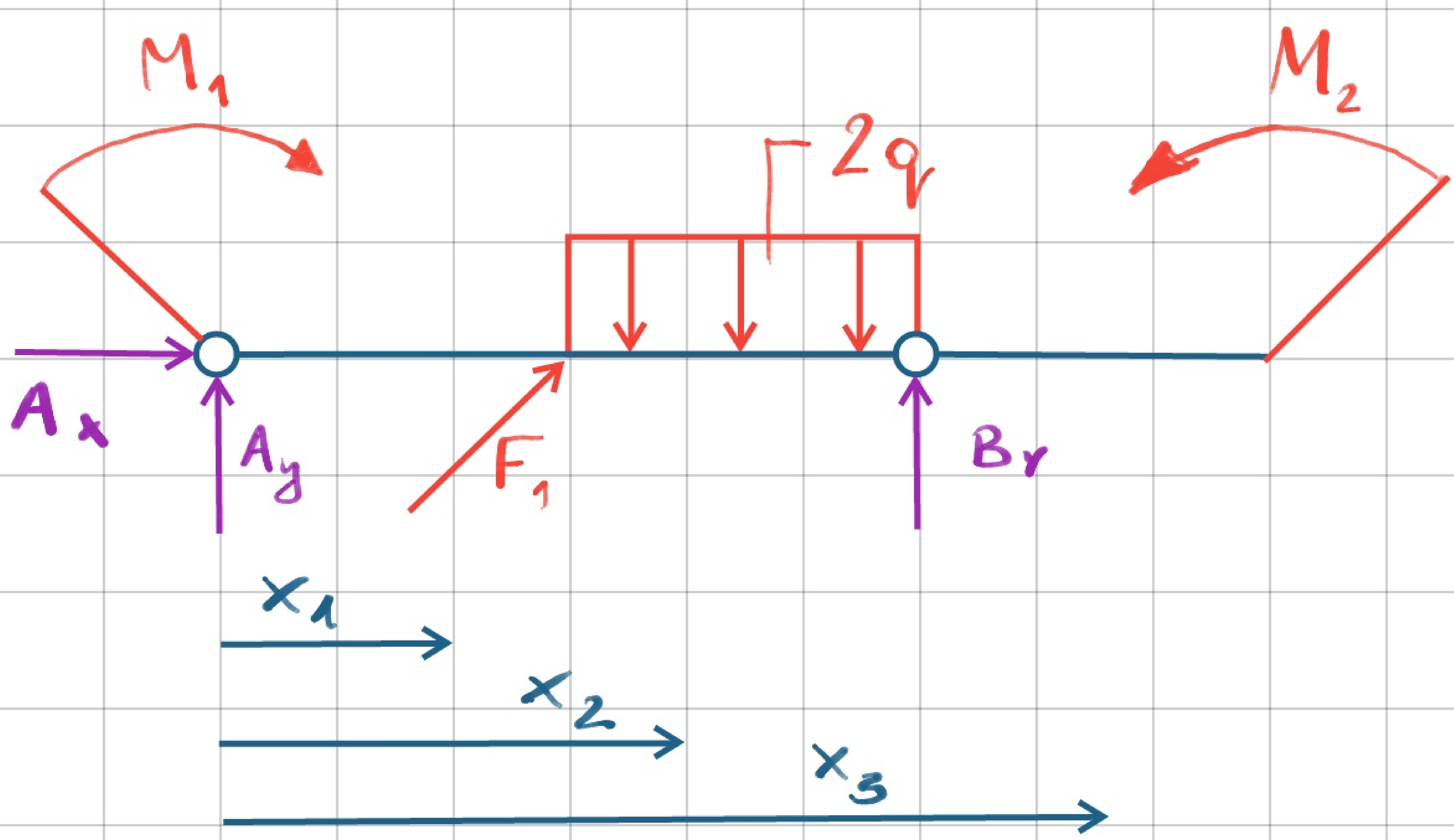


JESZCZE SŁOWO O SIŁACH NORMALNYCH

W obliczeniach skupiliśmy się tylko na sile tnącej, ale w belce występowała jeszcze siła normalna czyli o kierunku zgodnym z osią belki.

Znak siły tnącej przyjmujemy jako dodatni jeśli powoduje ona rozciąganie belki.





W przedziale pierwszym działa siła $A_x = -2qa$ co powoduje rozciąganie $N = -A_x = 2qa$.
W przedziałach $\underline{\text{II}}$ i $\underline{\text{III}}$ siły normalne A_x i F_{1x} znoszą się.