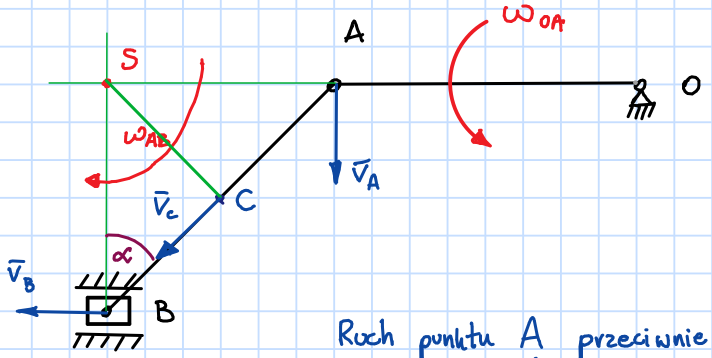
Kinematyka

W przedstawionych układach korbowo-wodzikowych wyznacz wartość prędkości liniowych punktów A, B i C.

ω_{OA} - prędkość kątowa członu OA w ruchu obrotowym wokół punktu O

$\bar{v}_A$ - prędkość liniowa punktu A; wektor $\bar{v}_A$ jest styczny do toru ruchu punktu A w ruchu obrotowym wokół punktu O



Ruch punktu A przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara spowoduje ruch punktu B (który może poruszać się jedynie w kierunku horyzontalnym) w lewo - wektor prędkości punktu B.

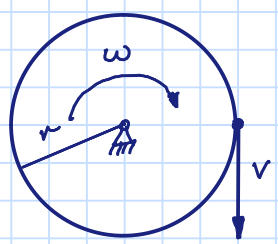
Dla ciała sztywnego - pręta AB znane są (co do kierunku i zwrotu dla obu wektorów i modułu dla wektora $\bar{v}_A$) prędkości dwóch punktów. W efekcie możemy poszukiwać tzw. chwilowego środka obrotu - punktu, wokół którego w danej chwili czasu obracają się wszystkie punkty ciała sztywnego

Chwilowy środek obrotu zostaje odnaleziony w punkcie S.

W oparciu o ułożenie wektorów $\bar{v}_A$ i $\bar{v}_B$ można wnioskować jaka będzie orientacja wektora ω_{AB}, t.j. wektora prędkości kątowej członu AB. Skoro punkt S jest chwilowym środkiem obrotu, to na podstawie wspomnianych wektorów $\bar{v}_A$ i $\bar{v}_B$ zwrot wektora ω_{AS} będzie zgodny z kierunkiem obrotu wskazówek zegara.

Prędkość punktu A można wyznaczyć na dwa sposoby - posiada on w prezentowanej chwili czasu dwa chwilowe środki obrotu: punkt O i punkt S.

Prędkość liniowa punktu wirującego wokół ustalonego punktu obliczamy zgodnie ze schematem:



$v = \omega \cdot r$

$\omega \left[\frac{1}{s}\right]$ $\quad$ $v\left[\frac{m}{s}\right]$

$r\,[m]$

Zatem, zgodnie z schematem:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot \overline{OA}$$

$$v_A = \omega_{AB} \cdot \overline{AS}$$

$$\omega_{OA} \cdot \overline{OA} = \omega_{AB} \cdot \overline{AS}$$

$$\omega_{AB} = \frac{\omega_{OA} \cdot \overline{OA}}{\overline{AS}}$$ stąd wyznaczymy prędkość kątową członu $\overline{AB}$ w ruchu obrotowym wokół punktu S

Dysponując prędkością kątową jesteśmy w stanie, przy znajomości długości ramion punktów B i C w ruchu obrotowym wokół punktu S, wyznaczyć prędkości liniowe tych punktów.

$v_B = \omega_{AB} \cdot \overline{BS}$ $\qquad \bar{v}_C = \omega_{AB} \cdot \overline{CS}$

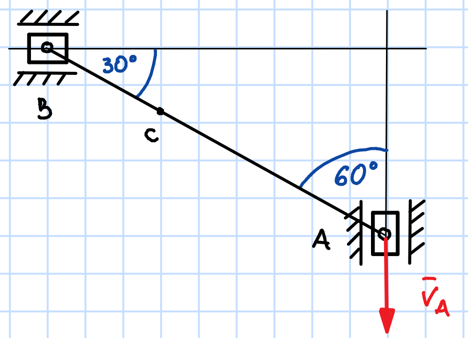
Do wyznaczenia długości ramion zastosujemy zależności geometryczne: proporcje, podobieństwo trójkątów, proste zależności trygonometryczne, twierdzenie cosinusów.

$$CS = \sqrt{BS^2 + CS^2 - 2 \cdot BS \cdot CS \cdot \cos\alpha}$$

$$\frac{BS}{AB} = \cos\alpha \qquad BS = AB \cos\alpha$$

Równanie na prędkość liniową zależy wprost od wartości prędkości kątowej i promienia obrotu. Można zatem graficznie określić prędkość poszczególnych punktów i zweryfikować uzyskane wyniki.

Zadanie 1. Dla przedstawionego mechanizmu wyznacz prędkości liniowe punktów A, B i C.



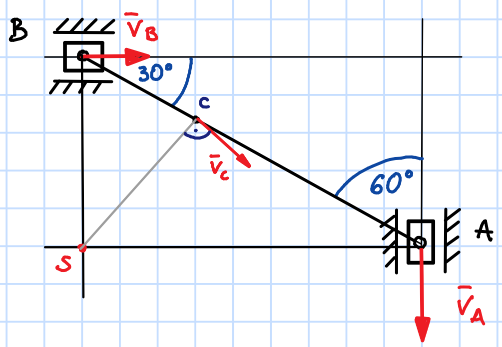
DANE:

$V_A = 30\ ^{cm}/_{s}$

$AB = 60\,cm$

$AC = \frac{2}{3} AB$

Koniec A pręta AB może poruszać się wzdłuż pionowego toru, podczas gdy punkt B może poruszać się tylko po horyzontalnym torze.
Wobec przemieszczania punktu A w dół, punkt B może jedynie poruszać się na prawo.



Położenie chwilowego środka obrotu wyznaczono graficznie na przecięciu prostych prostopadłych do wektorów prędkości $\bar{v}_A$ i $\bar{v}_B$. Wektor prędkości $\bar{v}_C$ jest prostopadły do ramienia wektora $\overline{CS}$

Względem chwilowego środka S poszczególne prędkości liniowe punktów policzymy wg wzoru:

$$v_B = \omega_{AB} \cdot \overline{BS}$$

$$v_C = \omega_{AB} \cdot \overline{CS}$$

Prędkość ω_{AB} to prędkość kątowa w ruchu obrotowym wokół punktu S. Prędkość punktu A, mimo, że jest znana, może być również policzona według podanej już zależności:

$$v_A = \omega_{AB} \cdot AS$$

skąd policzymy wartość ω_{AB}

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AS}$$

$$AS = AB \cos 60^\circ$$

$$AS = 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3} \text{ cm} \simeq 51{,}96 \text{ cm}$$

$$\omega_{AB} = \frac{30}{30\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \; s^{-1}$$

Do policzenia pozostają odcinki BS i CS:

$$BS = AB \sin 30^\circ$$

$$BS = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30 \text{ cm}$$

$$CS = \sqrt{AC^2 + AS^2 - 2AS \cdot AC \cdot \cos 30^\circ}$$

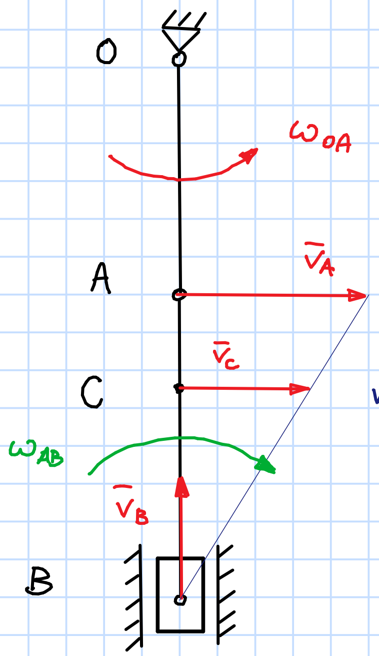
$$CS = \sqrt{40^2 + (30\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$CS \simeq 26{,}45 \text{ cm}$$

Znajomość długości ramion - już na podstawie schematu pozwala oszacować poprawność uzyskanych wyników. Ostatecznie:

$$v_B = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3} \text{ cm} \simeq 17{,}32 \text{ cm}$$

$$v_C \simeq 26{,}45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 15{,}28 \text{ cm}$$



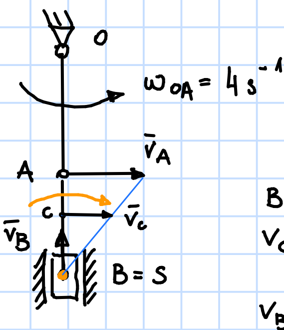
$OA = 15\,cm$

$AC = \frac{1}{3} AB = 7\,cm$

$\omega_{OA} = \frac{1}{4}\, s^{-1}$

$v_A = \omega_{AB} \cdot AB$

$v_c = \omega_{AB} \cdot BC$



$OA = 15\,cm$
$AC = \frac{1}{3} AB = 7\,cm$

$BC = \frac{2}{3} AB$, to
$V_c = \frac{2}{3} V_A$

$V_B = 0$

Ramię OA będzie obracać się wokół punktu O przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara. Po budowie mechanizmu wnioskujemy, że punkt B przemieści się do góry z prędkością $\bar{v}_B$.

Chwilowy środek obrotu dla członu AB znajduje się w punkcie B. Oznacza to, że ramię dla punktu B jest zerowe, co powoduje, że $v_B = 0$. Prędkość punktu C można wyznaczyć również graficznie ze względu na fakt, że zależność jest liniowa.

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AB} = \frac{\omega_{OA} \cdot OA}{AB}$$

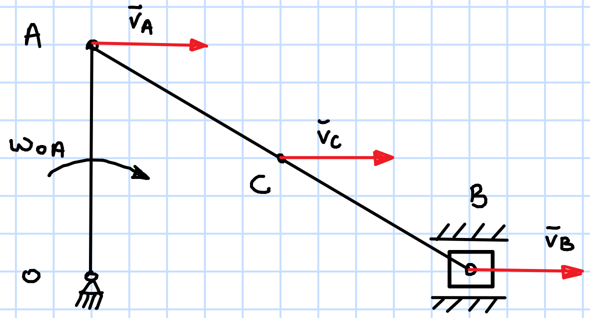
$$\omega_{AB} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \cancel{15}^{\,5}}{\cancel{21}_{\,7}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{28}\, s^{-1}$$

$$v_c = \frac{5}{28}\, s^{-1} \cdot 14\,cm = \frac{5}{\cancel{28}_{\,2}} \cdot \frac{\cancel{14}^{\,1}}{1} = \frac{5}{2} = 2{,}5\ cm/s$$

$$v_A = 15 \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3\tfrac{3}{4} = 3{,}75\ cm/s$$

$$v_B = 0$$

Podobnie jak w poprzednim zadaniu ważne jest wykonanie rysunku – pozwoli on zweryfikować poprawność przeprowadzonych obliczeń (dłuższe ramię -> większa prędkość).



W prezentowanym układzie prędkość v_A będzie prostopadła do ramienia OA o zwrocie wynikającym z orientacji wektora ω_{OA}. Podobnie punkt B - może poruszać się jedynie wzdłuż prostej o przebiegu horyzontalnym - będzie miał wektor prędkości v_B zorientowany równolegle do wektora v_A.

Poszukiwanie chwilowego środka obrotu doprowadzi nas do wniosku, że skoro linie prostopadłe do $\bar{v}_A$ i $\bar{v}_B$ nie przecinają się (bo również są równoległe), to chwilowy środek obrotu dla członu AB nie istnieje.

Brak chwilowego środka obrotu → brak ruchu obrotowego pręt AB wykonuje ruch postępowy zatem

$$v_A = v_B = v_C = \omega_{OA} \cdot OA$$