KRATOWNICE

Kratownicą nazywamy strukturę zbudowaną z prętów, które są ze sobą połączone przegubowo.

Na potrzeby inżynierskich obliczeń i oszacowań korzystamy z założeń teoretycznych:

- kratownica (a więc jej pręty) jest nieważka
- pręty są prostoliniowe
- obowiązuje zasada zesztywnienia - stałość wymiarów geometrycznych
- zewnętrzne siły obciążające kratownice są przyłożone wyłącznie w węzłach
- siły wewnętrzne działają zawsze wzdłuż osi prętów

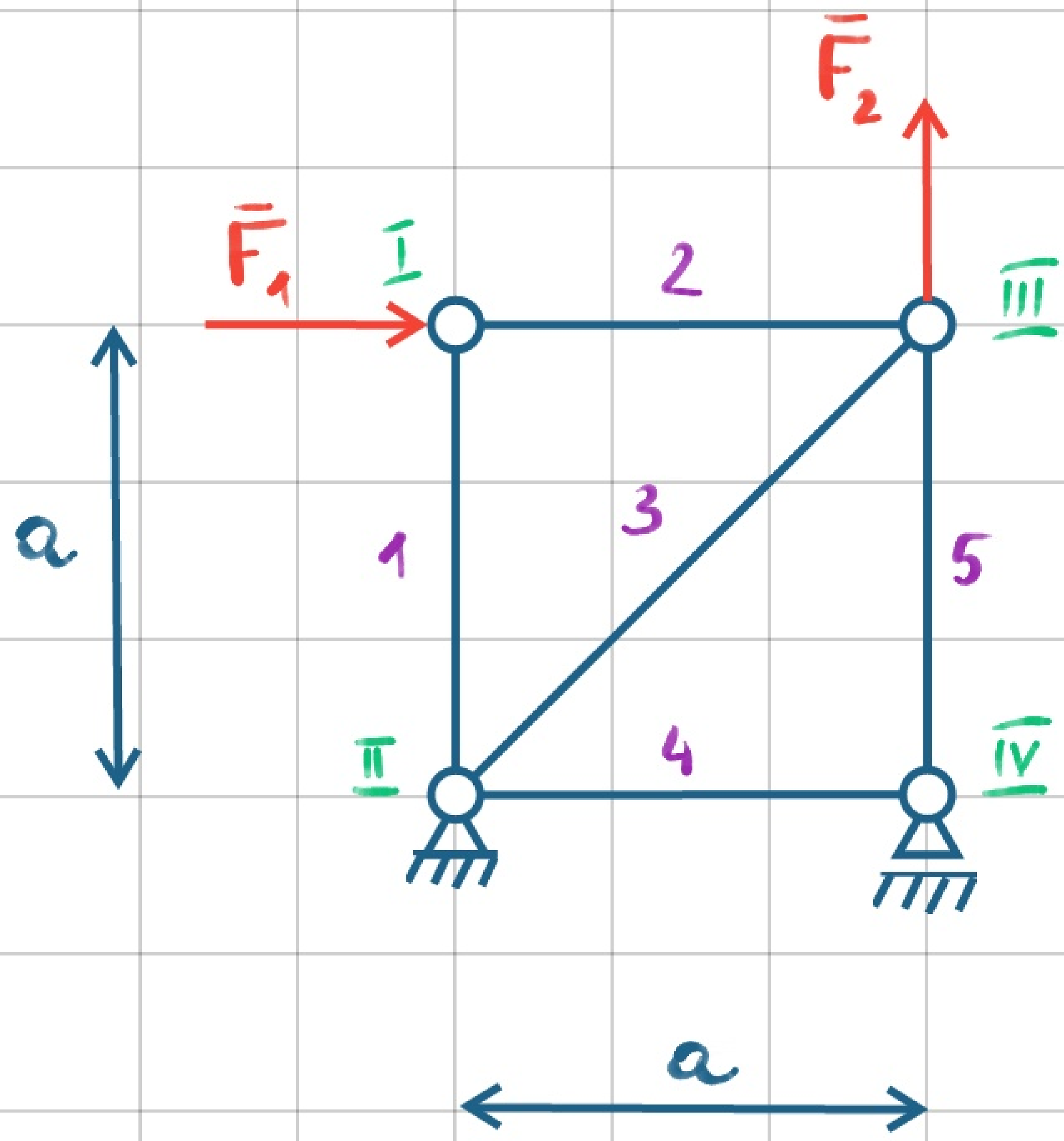
W naszych rozważaniach zajmiemy się wyłącznie kratownicami płaskimi.

W celu wyznaczeniu sił reakcji i sił wewnętrznych w prętach należy sprawdzić czy kratownica jest statycznie wyznaczalna.

Skorzystamy z równania: $p = 2w - r$

$p = 2w - r$

p - liczba prętów
w - liczba węzłów
r - liczba reakcji



$\bar{F}_1 = 10\,kN$
$\bar{F}_2 = 7\,kN$

$p = 5 \quad w = 4 \quad r = 3$ liczba reakcji z obu podpór wynosi 3

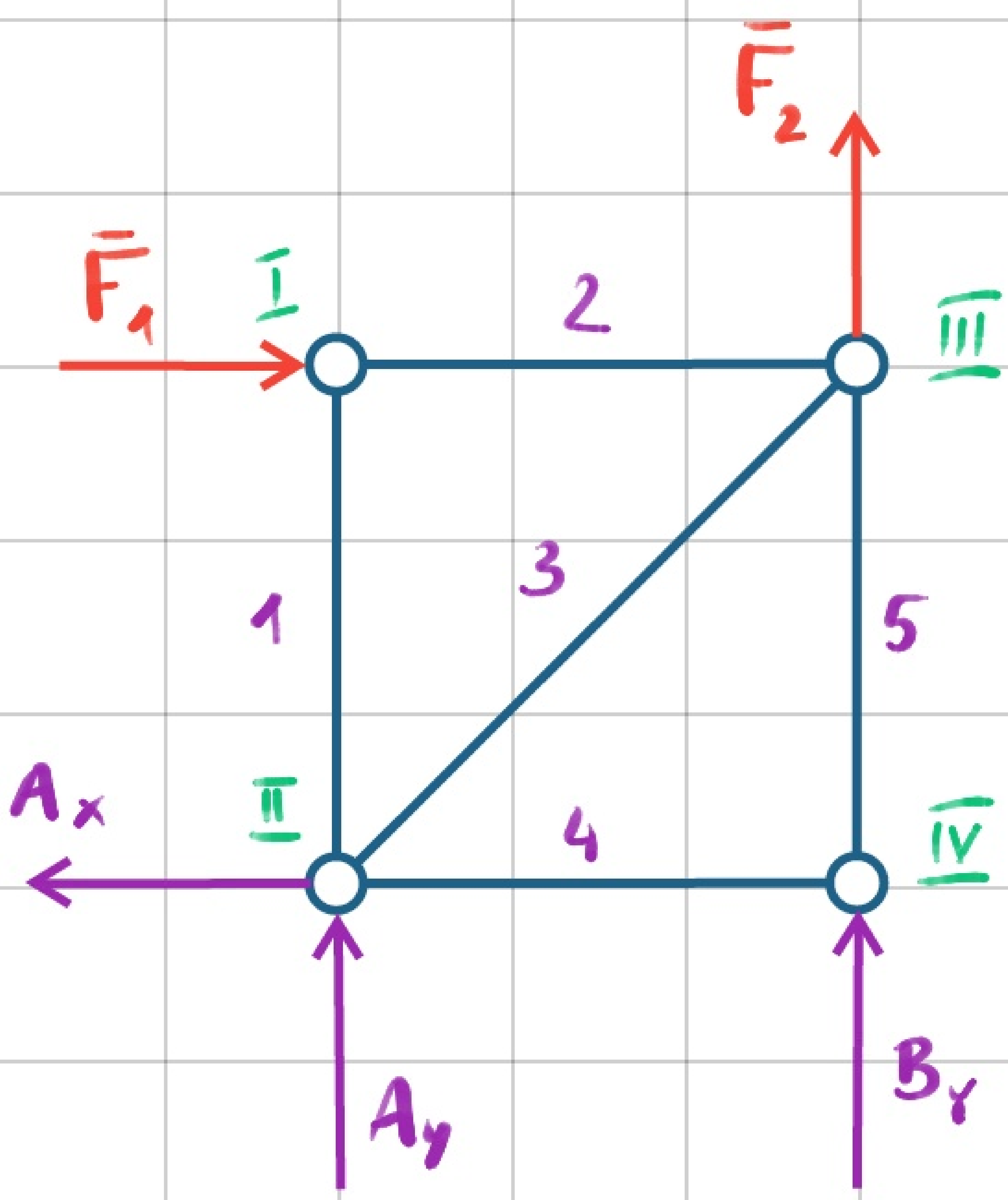
$5 = 2 \cdot 4 - 3$ ✓

Kratownica jest statycznie wyznaczalna.

Zagadnienie statycznie wyznaczalne to takie, w którym wyznaczenie niewiadomych sił jest możliwe w oparciu o metody statyki.
Liczba reakcji, które pojawiają się w efekcie oswobodzenia z więzów jest równa liczbie równań równowagi.

Jeżeli więzów potrzebnych do unieruchomienia obiektu jest za mało wówczas układ taki jest NIESZTYWNY, jeśli jest ich za dużo to mamy do czynienia z PRZESZTYWNIENIEM.

statycznie niewyznaczalne



reakcje wprowadzamy po usunięciu podpór
zwroty przyjmujemy dowolnie *

Reakcje wyznaczamy w oparciu o równania równowagi – 3 reakcje wymagają zbudowania 3 równań.

* jeśli okaże się, że reakcje wyszła nam ujemna to znaczy to, że przyjęliśmy odwrotny zwrot

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M^{A} = 0 \end{cases}$$

dla naszego układu sił niejawnie przyjmujemy układ X-Y na którego osie będziemy rzutować siły

biegun do wyznaczenia momentu siły przyjmujemy dowolnie; wskazany jest jednak taki jego wybór aby napisać równanie z tylko jedną nieznaną siłą (czyli najlepiej bieguna szukać w podporze A lub B)

$\Sigma F_{ix} = 0 \qquad F_1 - A_x = 0$

$\Sigma F_{iy} = 0 \qquad A_y + B_y + F_2 = 0$

$\Sigma M^A = 0 \qquad F_1 \cdot a - F_2 \cdot a - B_y \cdot a = 0 \quad / : a$

Z warunku 1 obliczymy $A_x = F_1 = 10\,kN$

skoro $A_x > 0$ tzn. że zwrot przyjęliśmy prawidłowo

Z warunku 3 obliczymy B_y

$B_y = F_1 - F_2 = 10 - 7$

$B_y = 3\,kN$

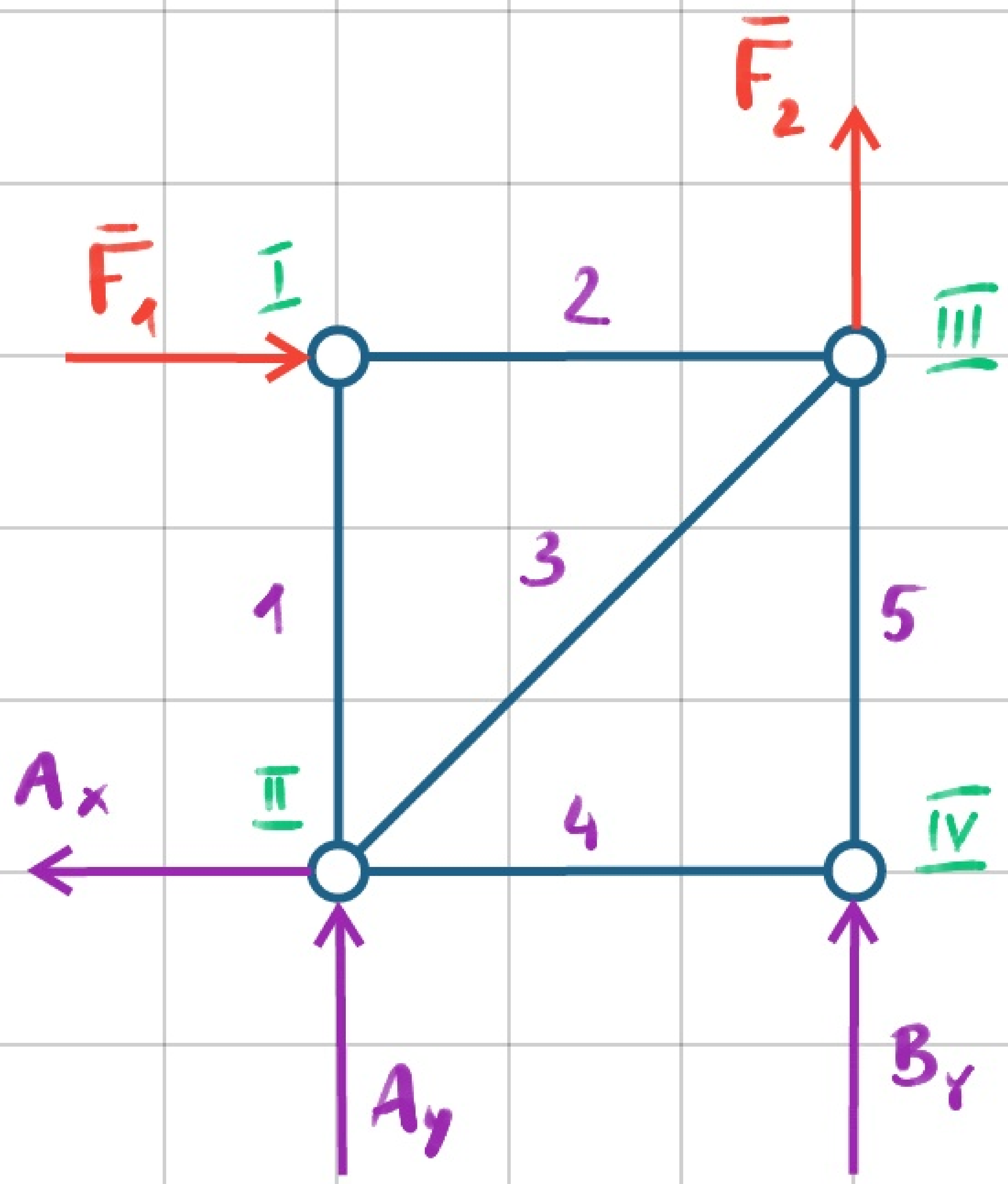
Z warunku 2 policzymy A_y

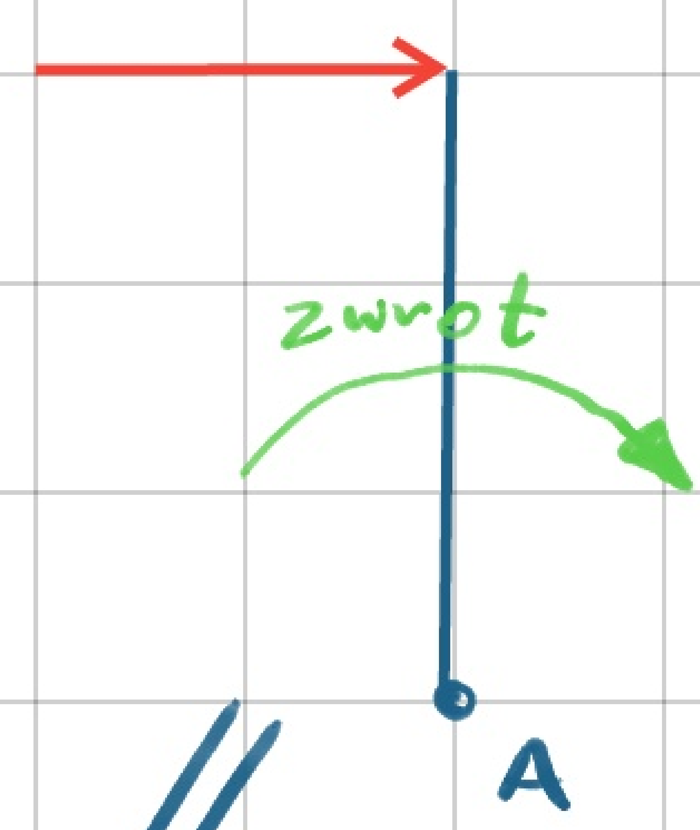
$A_y = -F_2 - B_y = -7 - 3 =$

$A_y = -10\,kN$

$A_y < 0$ co oznacza, że przyjęliśmy odwrotny zwrot, możemy zostawić to jak jest lub zmienić zwrot i znak reakcji A_y na przeciwny

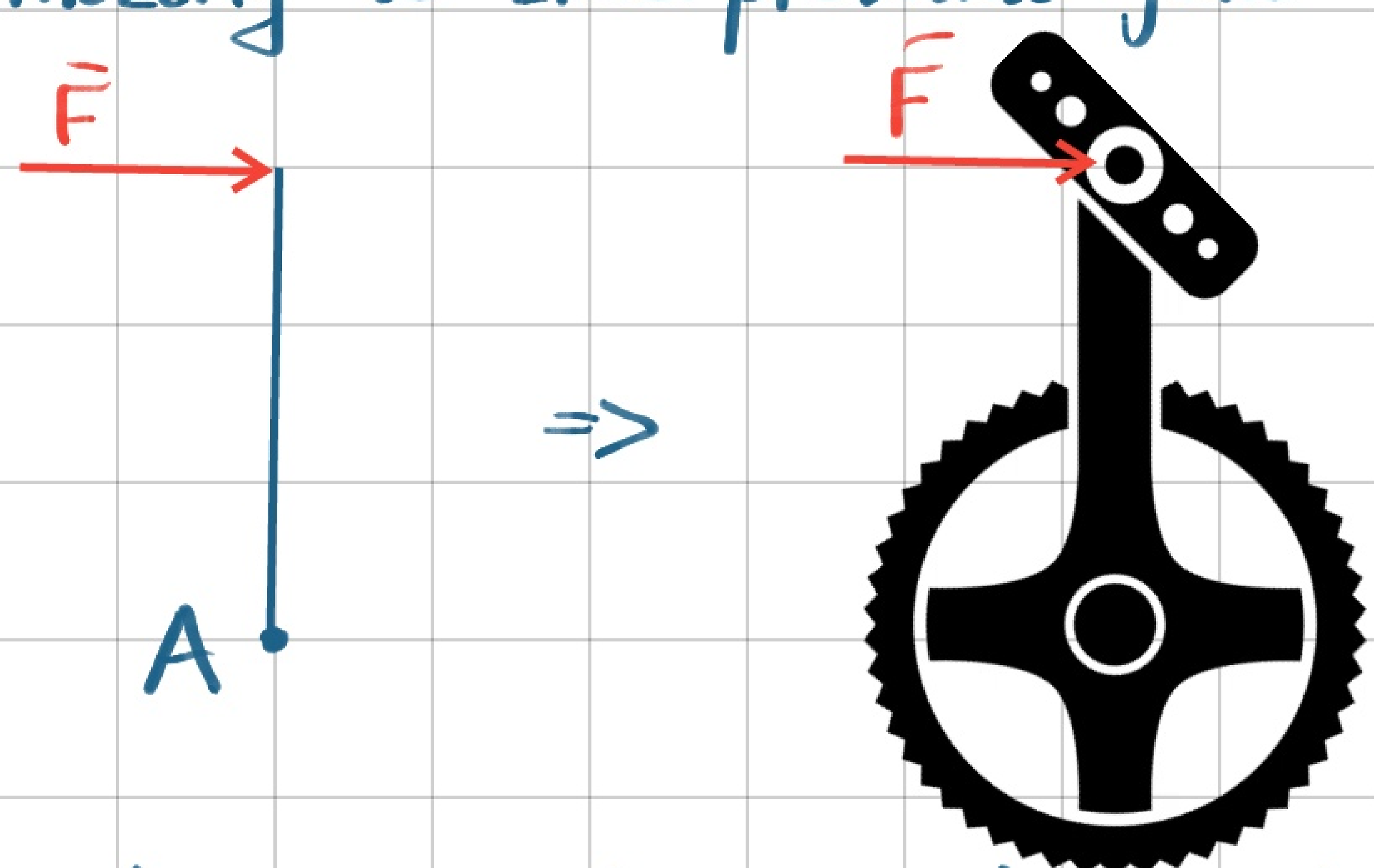
Trzeba jeszcze dodać jaka jest konwencja znaku przy wyznaczaniu momentu sił.





taki zwrot oznaczany jako dodatni

możemy to zinterpretować jako korbę

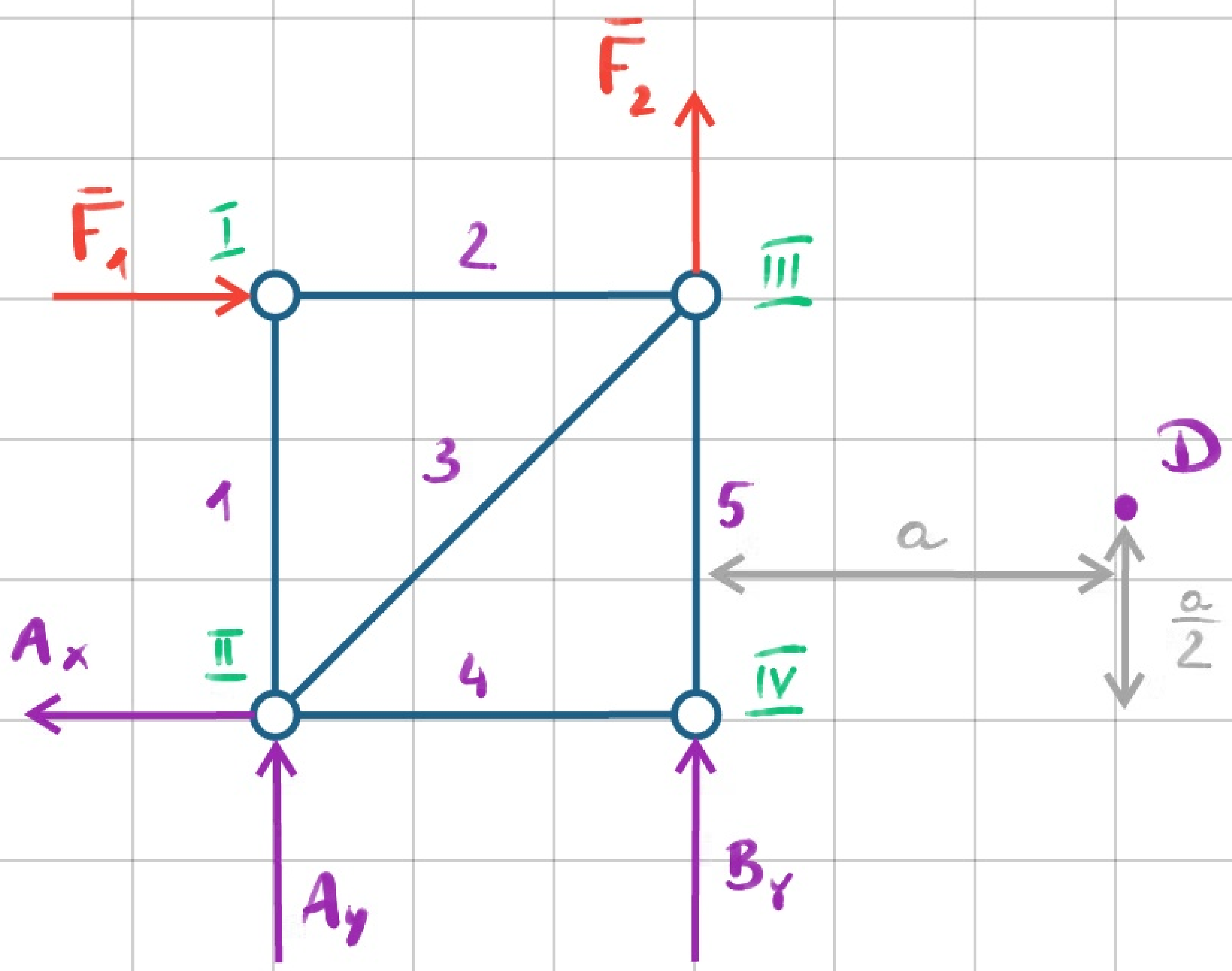


obrót zgodny z ruchem wskazówek zegara interpretujemy jako dodatni, przeciwny jako ujemny; można odwrotnie - grunt żeby już potem być konsekwentnym

Skoro policzyliśmy reakcje to moglibyśmy przystąpić do dalszych obliczeń, ale zaleca się* aby wartości reakcji sprawdzić.

* ZAWSZE SPRAWDZAJ REAKCJE!

Sprawdzenie reakcji gwarantuje nam, że dalsze obliczenia poprowadzimy z prawidłowymi wartościami.
Przyjmujemy biegun - najlepiej taki, który nie wyeliminuje wyznaczonych właśnie reakcji.



$$\sum_{i=1}^{n} M_i^D = 0$$

$$F_1 \cdot \frac{a}{2} + F_2 \cdot a + B_y \cdot a + A_y \cdot 2a + A_x \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad / : a$$

$$\frac{F_1}{2} + F_2 + B_y + 2A_y + \frac{A_x}{2} = 0$$

$$5 + 7 + 3 - 20 + 5 = 0 \qquad 0 = 0$$

Skoro policzyliśmy reakcje i mamy pewność, że wszystko jest dobrze, to możemy rozpocząć wyznaczanie sił wewnętrznych w prętach kratownicy.

Omówimy dwie metody analityczne:

- metodę wydzielania węzłów,
- metodę Rittera.

METODA WYDZIELANIA WĘZŁÓW

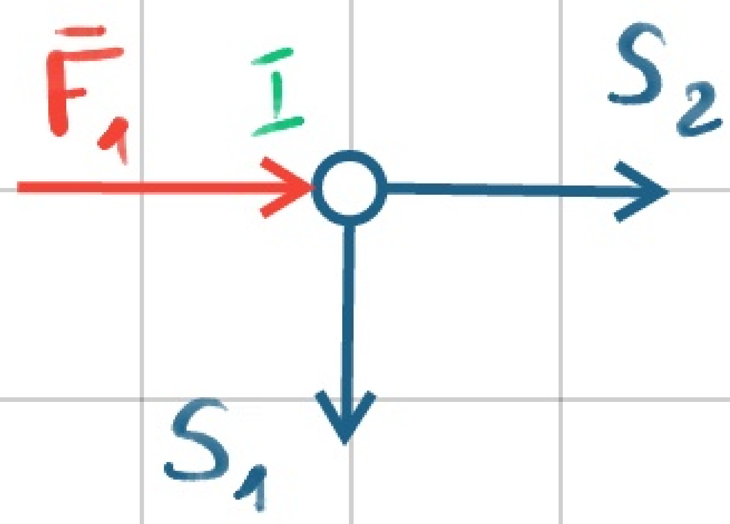
W metodzie tej analizujemy kolejno węzły kratownicy wraz z wchodzącymi do / wychodzącymi z niego siłami.

Każdy z takich węzłów z siłami traktujemy jak zbieżny układ sił w równowadze.

Węzeł wybieramy tak, by w oparciu o 2 równania równowagi (ΣF_{ix}, ΣF_{iy}) wyznaczyć poszukiwane siły.

Wybieramy węzeł, dorysowujemy siły czynne (obciążenie) i bierne (reakcje) z nim związane oraz poszukiwane siły wewnętrzne w prętach.

WĘZEŁ I



zwroty sił w prętach (S_1 i S_2) przyjmujemy od węzła, co oznacza że zakładamy rozciąganie prętów, czyli
siła dodatnie - pręt rozciągany
siła ujemne - pręt ściskany

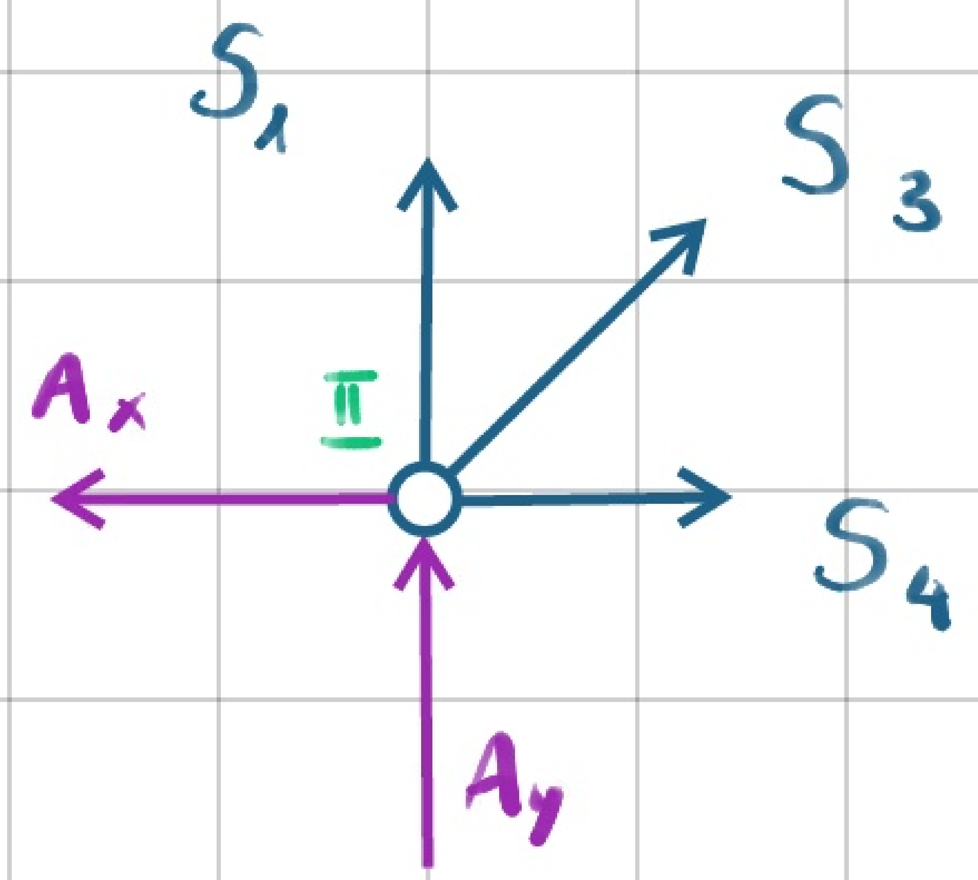
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}: \quad F_1 + S_2 = 0 \qquad S_2 = -F_1 = -10\,kN$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy}: \quad -S_1 = 0 \qquad S_1 = 0$$

pręt 2 jest ściskany

pręt 1 jest zerowy, tzn. nie przenosi obciążenia (oczywiście w naszej kratownicy opatrzonej wieloma założeniami)

WĘZEŁ II



S_1 jest już znane i równe 0, teraz nieznane są już tylko dwie siły

$$\Sigma F_{ix}: \quad -A_x + S_{3x} + S_4 = 0$$

$$\Sigma F_{iy}: \quad A_y + S_1 + S_{3y} = 0$$

$$S_{3y} = -A_y = 10\,kN$$

$$\frac{S_{3y}}{S_3} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

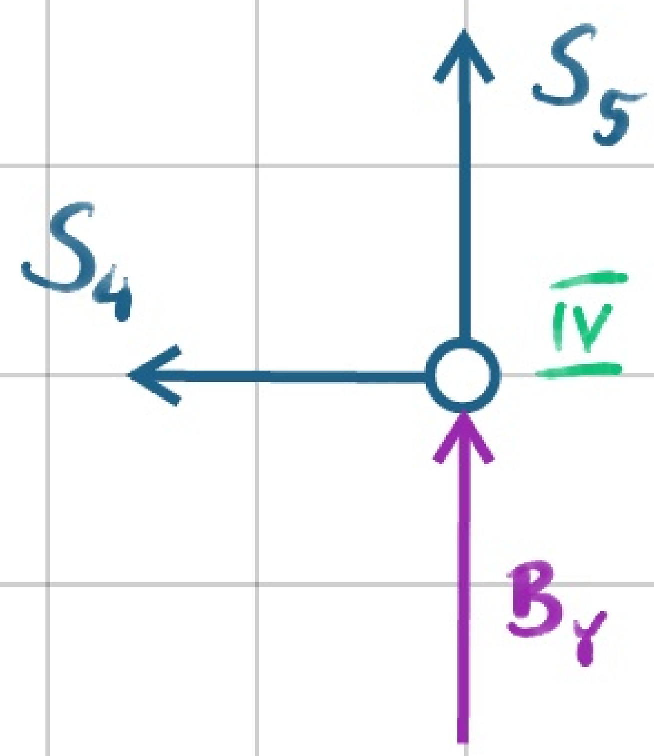
$$S_3 = \frac{2S_{3y}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,S_{3y}$$

$$S_3 = 10\sqrt{2}\,kN \simeq 14{,}1\,kN$$ pręt rozciągany

$$S_{3x} = S_{3y} = 10\,kN$$

$$S_4 = A_x - S_{3x} = 10 - 10 = 0$$ pręt zerowy

WĘZEŁ $\overline{\underline{IV}}$



Siła S_4 znana jest z poprzednich obliczeń i wynosi 0. Do policzenia zostaje tylko S_5.

$\Sigma F_{ix}: \quad -S_4 = 0$

$S_4 = 0$ pręt zerowy potwierdzają się obliczenia z węzła $\overline{\underline{II}}$

$\Sigma F_{iy}: \quad B_y + S_5 = 0$

$S_5 = -B_y = -3\,kN$ pręt ściskany

W ten sposób wyznaczyliśmy siły wewnętrzne we wszystkich prętach. Do wyznaczenia siły S_5 mogliśmy użyć węzła $\overline{\underline{III}}$, ale wychodzimy z założenia, że minimum obliczeń zmniejsza ryzyko błędu.

Metoda wydzielania węzłów:

- proste obliczenia, ale jest ich dużo
- nie można zacząć rozwiązywać kratownicy od dowolnego węzła - mamy tylko dwa równania równowagi do dyspozycji
- obliczenia są sekwencyjne, jeśli pomylimy się na początku to błąd będzie występował w dalszych zależnych obliczeniach

---

METODA RITTERA

Metoda Rittera (metoda przecięć) polega na przecięciu kratownicy na dwie części i wyznaczenie sił wewnętrznych TYLKO w przeciętych prętach.

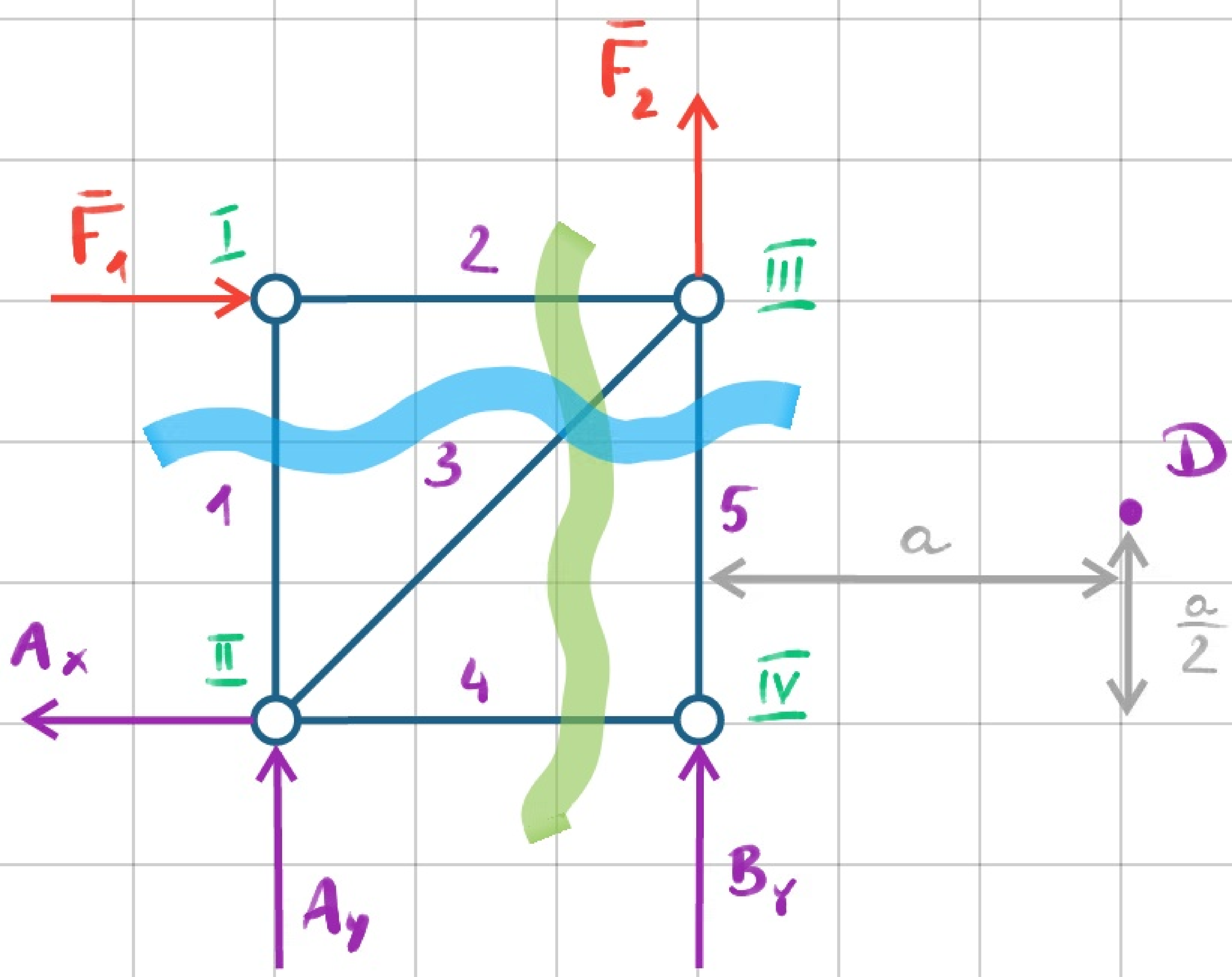
Należy ciąć przez 3 pręty.

„Ciąć będziesz przez trzy pręty, ani mniej, ani więcej. Trzy to liczba twego cięcia. Nie przetniesz czterech ani dwóch, chyba że w trakcie cięcia trzech. Pięć jest wykluczone. Gdy trzeci pręt przetniesz, który będzie trzecim z kolei, kratownica na dwoje się rozpadnie."

Poza faktem, że pręty mają być zawsze 3, istotne jest jeszcze żeby:

- pręty nie wychodziły wszystkie razem z jednego węzła
- pręty nie były wzajemnie (wszystkie 3) równoległe, 2 pręty mogą być równoległe
- po przecięciu 3 prętów kratownica musi rozpaść się na dwie części

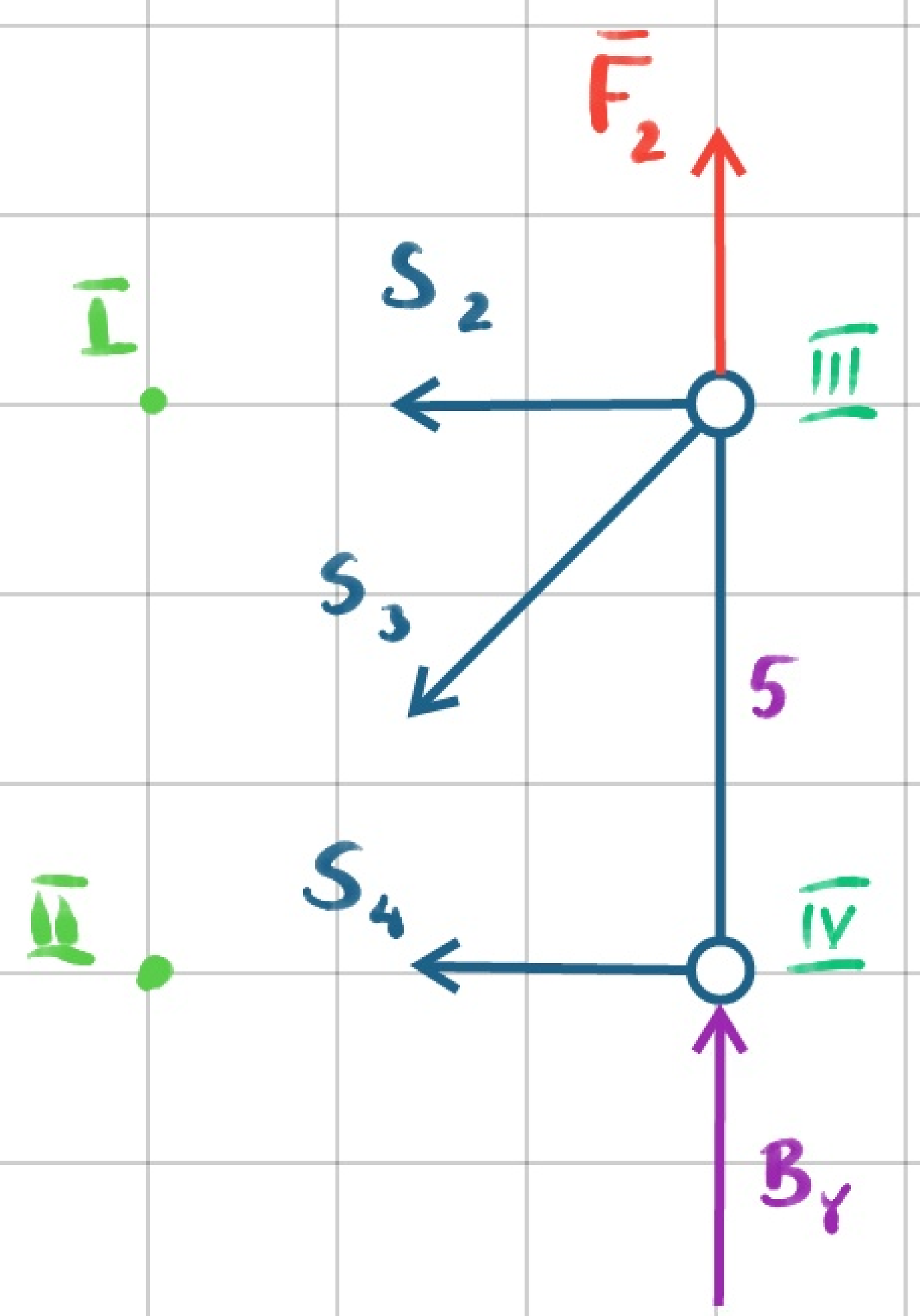
Jest bardzo istotne, żeby stosować się do tych założeń. Inaczej metoda nie zadziała.



dla powyższej kratownicy możliwe są dwa cięcia

- przez pręty 1 - 3 - 5
- przez pręty 2 - 3 - 4

Po wykonaniu cięcia wybieramy jedną z części kierując się przy wyborze łatwością obliczeń.



siły w przeciętych prętach oznaczamy ze zwrotami OD węzłów, jeśli siły wyjdą dodatnie wówczas jest to siła rozciągająca, jeśli ujemna to ściskająca

Następnie mając 3 niewiadome siły musimy napisać trzy równania równowagi.

Najwygodniej jest napisać równanie na sumę momentów sił, za każdym razem tak by wyeliminować 2 z 3 nieznanych sił.

$$\Sigma M^{II}: \quad -S_2 \cdot a - F_2 \cdot a - B_y \cdot a = 0 \; / : a$$

$$S_2 = -B_y - F_2 = -3 - 7 = -10 \text{ kN}$$

$$\Sigma M^{III}: \quad S_4 \cdot a = 0 \qquad S_4 = 0$$

Nie jest możliwe znalezienie bieguna, dla którego wyeliminowane zostaną siły S_2 i S_4.
Można jednak napisać równanie na sumę sił w kierunku prostopadłym do kierunku S_2 i S_4 przez co zostaną one wyeliminowane.

$$\Sigma F_{iY}: \quad B_Y + F_2 - S_{3Y} = 0$$

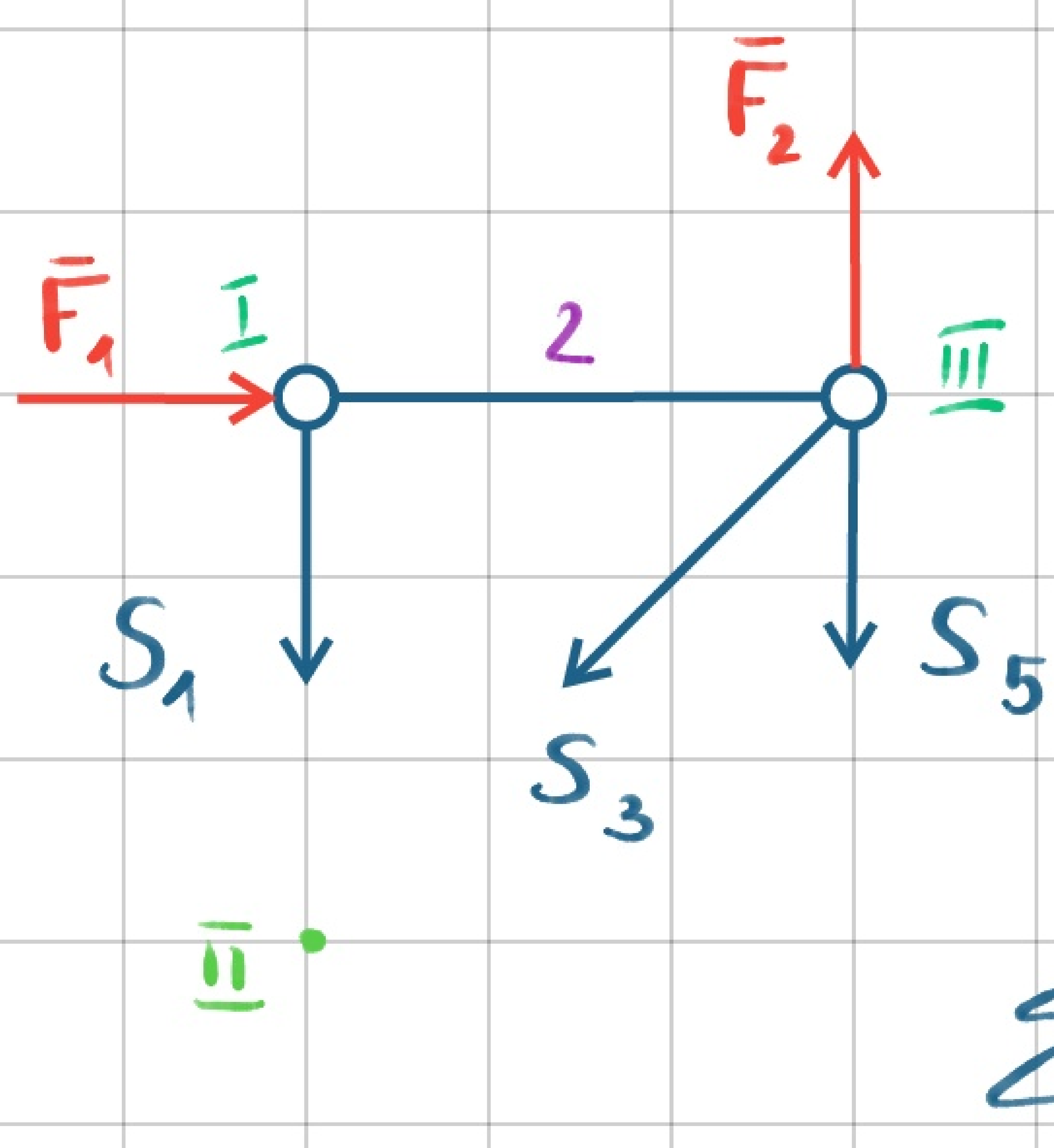
$$S_{3Y} = B_Y + F_2 = 3 + 7 = 10\,kN$$

$$\frac{S_{3Y}}{S_3} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_3 = S_{3Y}\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\,kN$$

pręt 3 jest rozciągany

Teraz drugie cięcie



$$\Sigma M^{II}: \quad F_1 \cdot a + S_5 \cdot a - F_2 \cdot a = 0$$

$$S_5 = F_2 - F_1 = 7 - 10 = -3\,kN$$

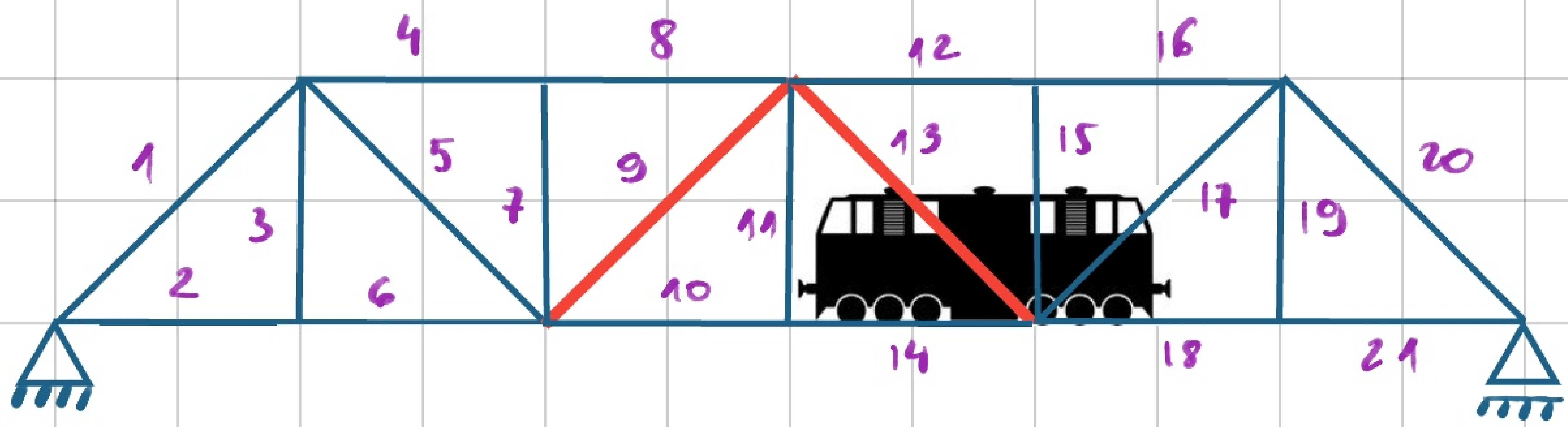
pręt 5 jest ściskany

$$\Sigma M^{III}: \quad -S_1 \cdot a = 0$$

$$S_1 = 0$$

pręt 1 jest zerowy

Metoda Rittera jest szczególnie przydatna w przypadku, gdy wyliczamy siły wewnętrzne w prętach jak poniżej:



Wyznaczenie sił w prętach 9 i 13 wymagałoby, przy użyciu metody wydzielania węzłów, obliczenia sił w prętach „po drodze".
Wykorzystując metodę Rittera wystarczy wykonać dwa cięcia 8-9-10 oraz 12-13-14 i napisać po jednym równaniu.

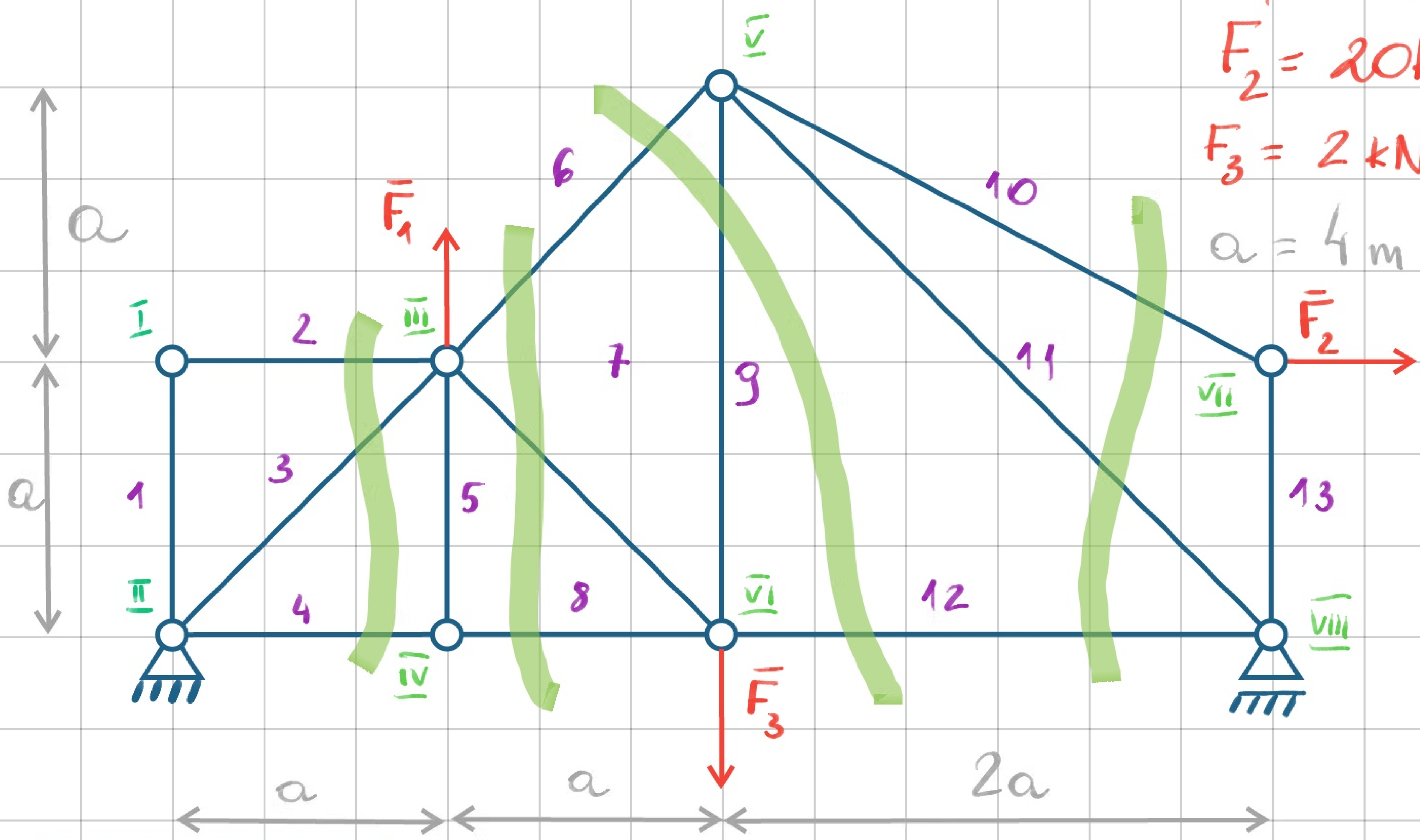
Wyznacz siły wewnętrzne w kratownicy.

$F_1 = 10kN$

$F_2 = 20kN$

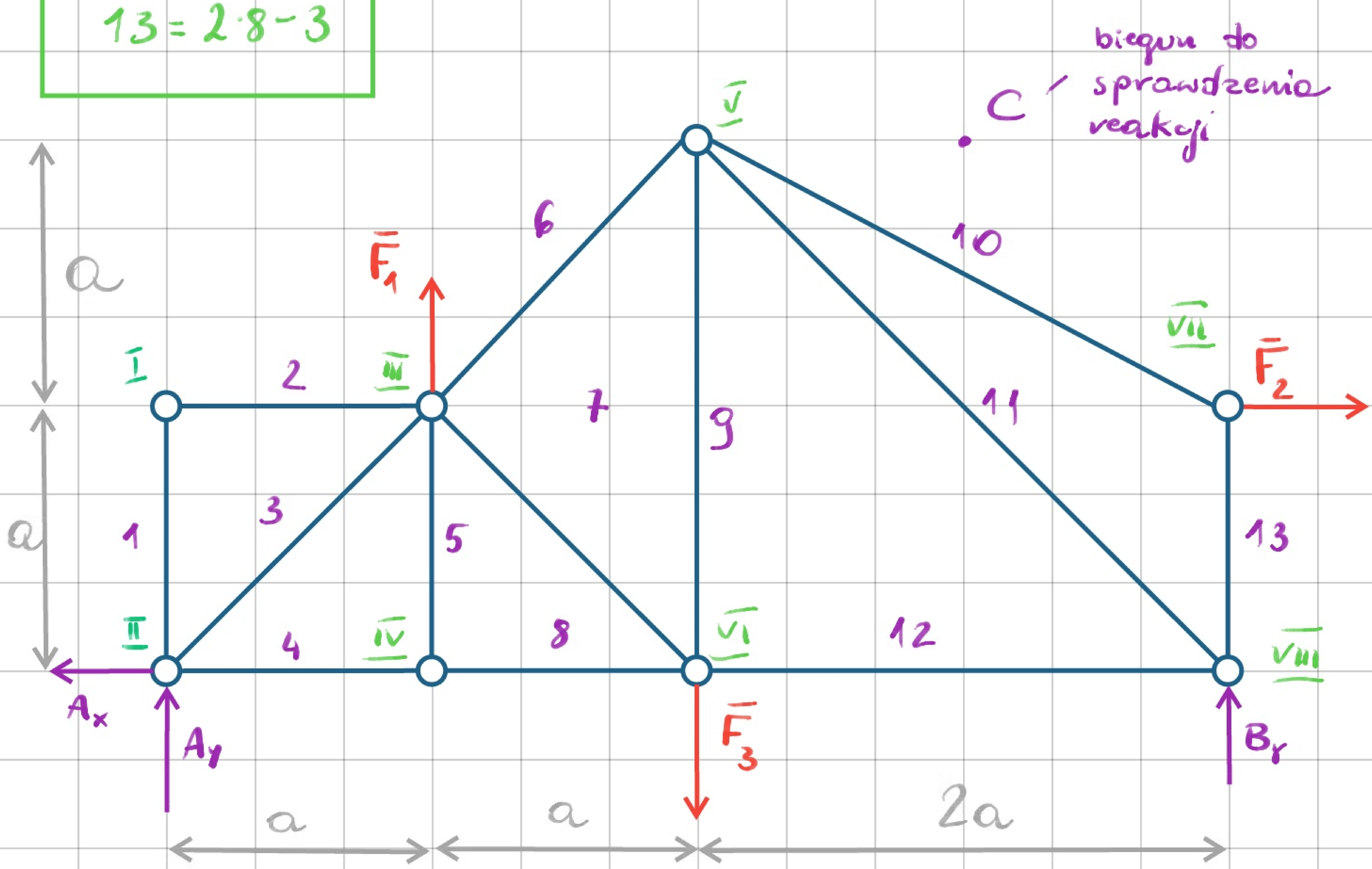
$F_3 = 2kN$

$a = 4m$



$p = 2w - r$

$13 = 2 \cdot 8 - 3$



OBLICZAMY REAKCJE

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}: \quad -A_x + F_2 = 0 \qquad A_x = F_2 = 20\,kN$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy}: \quad A_y + F_1 + B_y - F_3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^A: \quad -F_1 \cdot a + F_3 \cdot 2a + F_2 \cdot a - 4B_y a = 0 \quad /:a$$

$$B_y = \frac{2F_3 + F_2 - F_1}{4}$$

$$B_y = \frac{4 + 20 - 10}{4} = \frac{14}{4} = 3{,}5\,kN$$

$$A_y = F_3 - F_1 - B_y \qquad A_y = 2 - 10 - 3{,}5$$

$$A_y = -11{,}5\,kN$$

SPRAWDZENIE REAKCJI wg BIEGUNA C

biegun C nie eliminuje żadnej siły

$$A_y \cdot 3a + A_x \cdot 2a + F_1 \cdot 2a - F_3 \cdot a - F_2 \cdot a - B_y \cdot a = 0 \quad /:a$$

$$-34{,}5 + 40 + 20 - 2 - 20 - 3{,}5 = 0$$

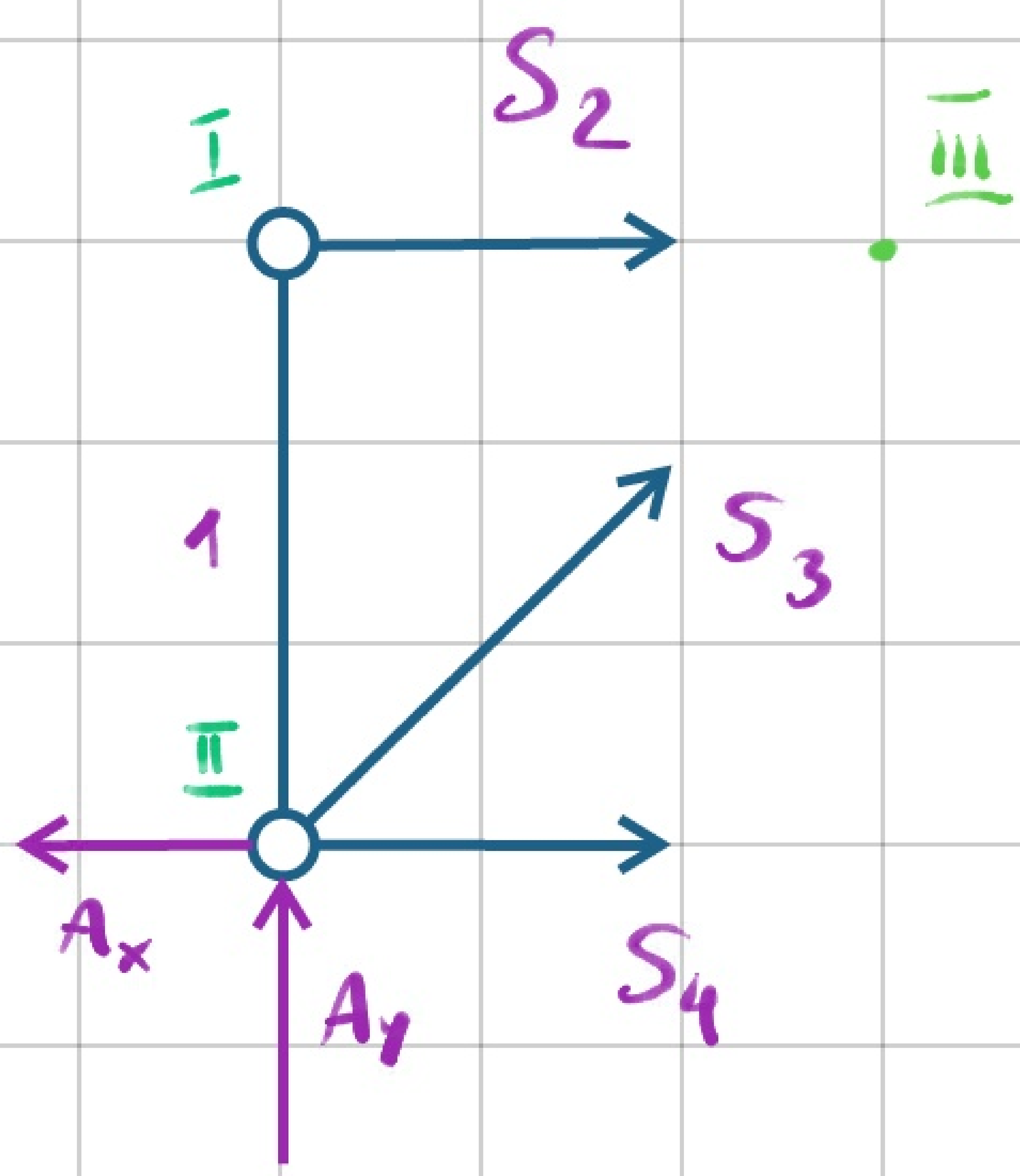
$$0 = 0$$

ok!

Reakcje wyliczone prawidłowo

Skoro reakcje są już znane, to możemy przeciąć kratownicę.

Cięcie 2-3-4, lewa strona przekroju:



$$\Sigma M_i^{II}: \quad S_2 \cdot a = 0$$

$$S_2 = 0$$

pręt 2 to pręt zerowy

$$\Sigma M_i^{III}: \quad A_y \cdot a + A_x \cdot a - S_4 \cdot a = 0 \;/ :a$$

$$S_4 = A_y + A_x$$

$$S_4 = -11,5 + 20 = 8,5\,kN$$

pręt 4 jest rozciągany

$$\Sigma P_{iy}: \quad A_y + S_{3y} = 0$$

$$S_{3y} = -A_y$$

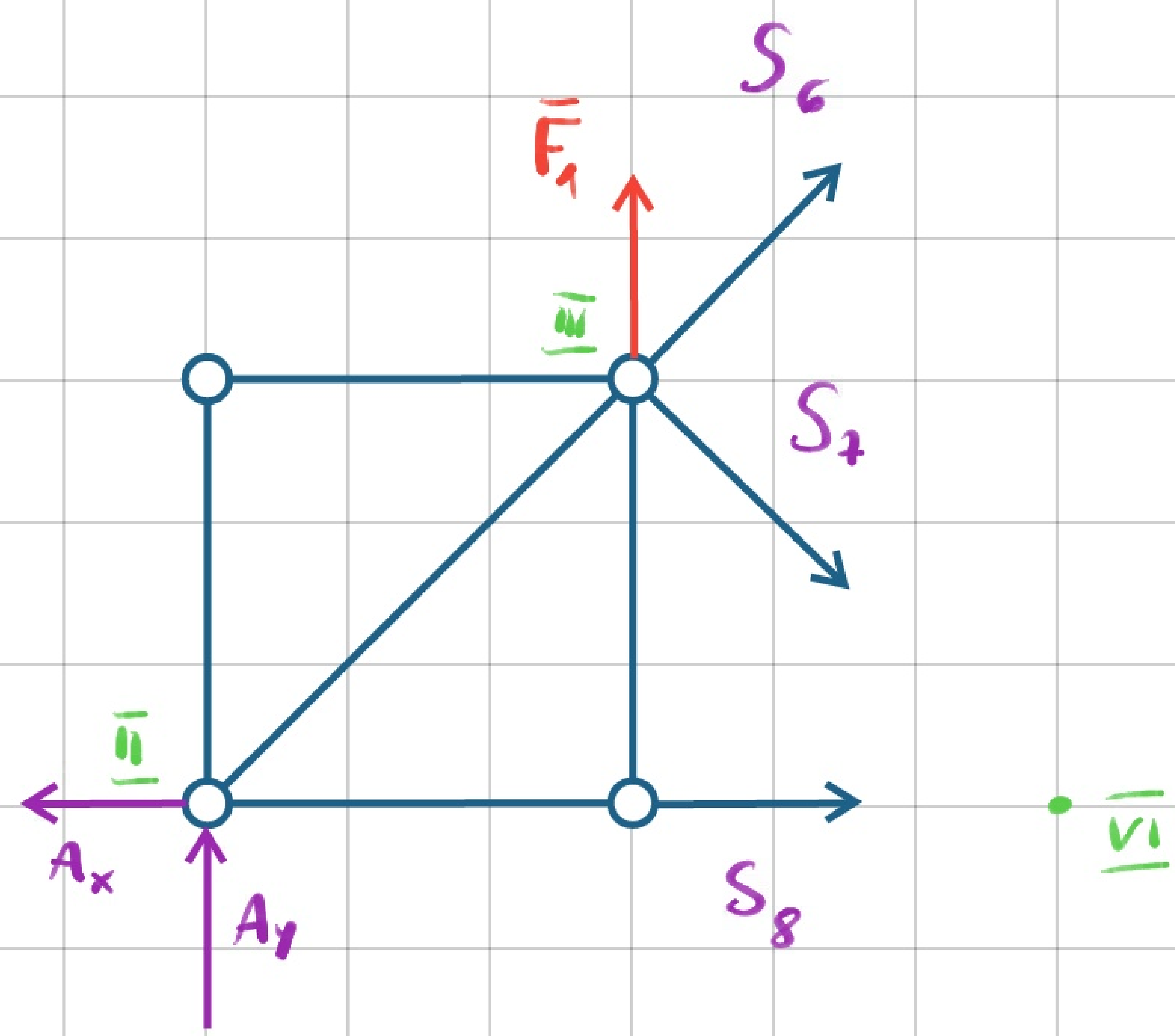
$$\frac{S_{3y}}{S_3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_3 = S_{3y}\sqrt{2}$$

$$S_3 = 11,5\sqrt{2}\,kN$$

pręt 3 jest rozciągany

Cięcie 6-7-8, lewa strona pretrgu:



$$\Sigma M_i^{\overline{III}}: \quad A_x \cdot a + A_y \cdot a - S_8 \cdot a = 0 \quad /:a$$

$$S_8 = A_x + A_y$$

$S_8 = 8{,}5 \text{ kN}$ pręt 8 jest rozciągany

$$\Sigma M_i^{\overline{II}}: \quad -F_1 \cdot a + S_7 a\sqrt{2} = 0 \quad /:a$$

$$S_7\sqrt{2} = F_1$$

$S_7 = F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ kN}$ pręt 7 jest rozciągany

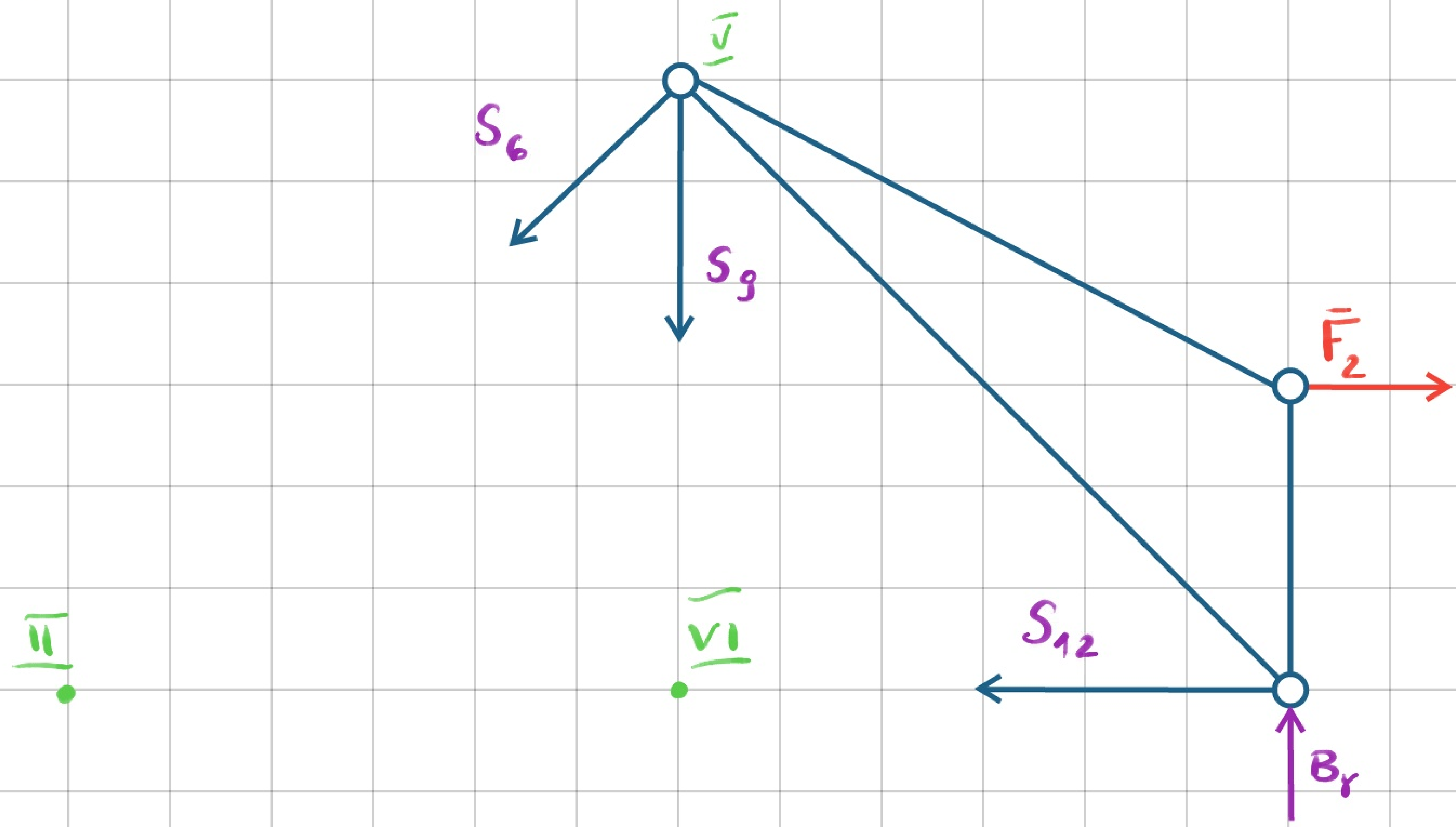
$$\Sigma M^{\overline{VI}}: \quad A_y \cdot 2a + F_1 \cdot a + S_6\sqrt{2}a = 0 \quad /:a$$

$$S_6 = \frac{-2A_y - F_1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-2A_y - F_1\right)$$

$$S_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(23 - 10\right) = 6{,}5\sqrt{2} \text{ kN}$$

pręt 6 jest rozciągany

Cięcie 6-9-12



$$\sum M_i^{\overline{II}}: \quad S_9 \cdot 2a - B_y \cdot 4a + F_2 \cdot a = 0 \quad / : a$$

$$S_9 = \frac{4B_y - F_2}{2} = \frac{4 \cdot 3{,}5 - 20}{4} = -1{,}5 \text{ kN}$$

pręt 9 jest ściskany

$$\sum M_i^{\overline{V}}: \quad -F_2 \cdot a + S_{12} \cdot 2a - B_y \cdot 2a = 0 \quad / : a$$

$$S_{12} = \frac{2B_y + F_2}{2} = \frac{2 \cdot 3{,}5 + 20}{2} = 13{,}5 \text{ kN}$$

pręt 12 jest rozciągany

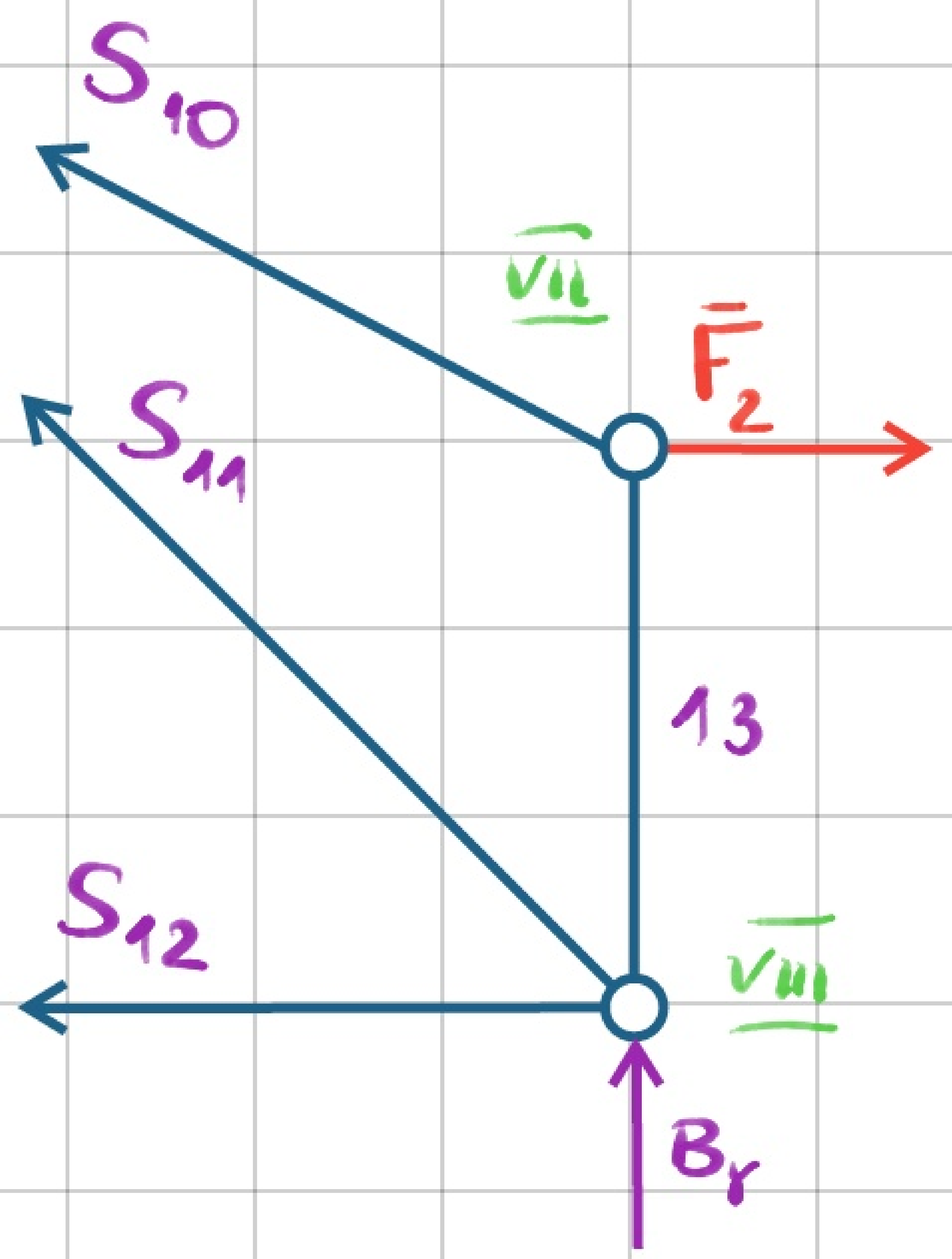
$$\sum M_i^{\overline{VI}}: \quad -S_6 \cdot \sqrt{2}\,a - B_y \cdot 2a + F_2 \cdot a = 0 \quad / : a$$

$$S_6 = \frac{F_2 - 2B_y}{\sqrt{2}} = \frac{20 - 7}{\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{2} = 6{,}5\sqrt{2} \text{ kN}$$

pręt S_6 jest ściskany

Cięcie 10-11-12

• $\overline{V}$



biegun eliminujący S_{10} i S_{12}

F

$$\Sigma M_i^{\overline{V}}: \quad S_{12} \cdot 2a - F_2 \cdot a - B_y \cdot 2a = 0 \;/ : a$$

$$S_{12} = \frac{F_2 + 2B_y}{2} = \frac{20+7}{2} = 13{,}5 \text{ kN}$$

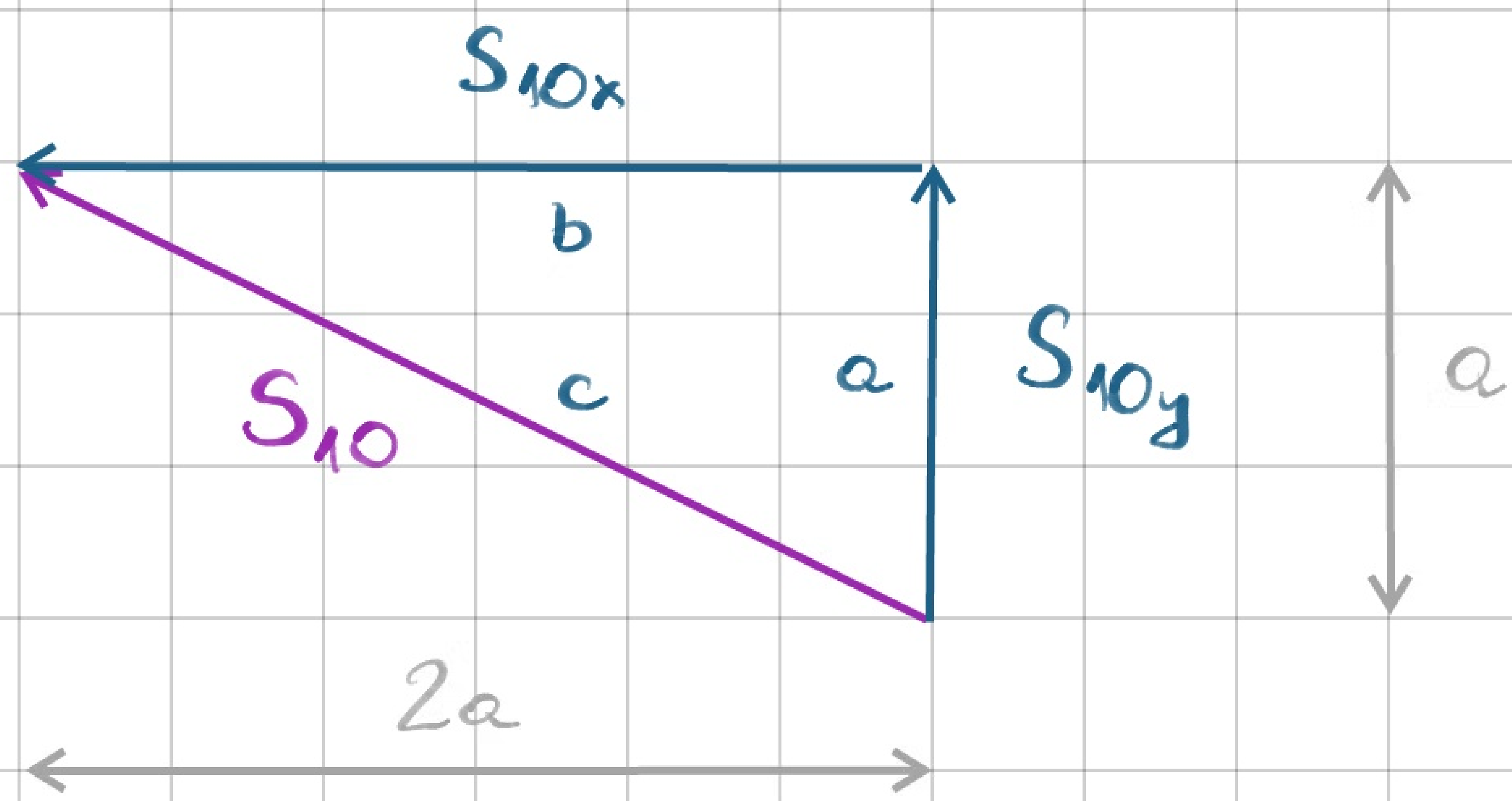
pręt 12 jest rozciągany

$$\Sigma M_i^{F}: \quad S_{11} \cdot \sqrt{2}\, a + F_2 \cdot a + B_y \cdot 2a = 0 \;/ : a$$

$$S_{11} = \frac{-F_2 - 2B_y}{\sqrt{2}} = \frac{-20-7}{\sqrt{2}} = -13{,}5\sqrt{2} \text{ kN}$$

pręt 11 jest ściskany

Pręt 10 leży pod nietypowym kątem, ale nie musimy go wyznaczać. Wystarczy, że obliczymy rzuty pręta na oś X i Y.



$a = 1$

$b = 2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$

$\frac{S_{10y}}{S_{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\qquad S_{10y} = \frac{\sqrt{5}}{5} S_{10}$

$\frac{S_{10x}}{S_{10}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\qquad S_{10x} = \frac{2\sqrt{5}}{5} S_{10}$

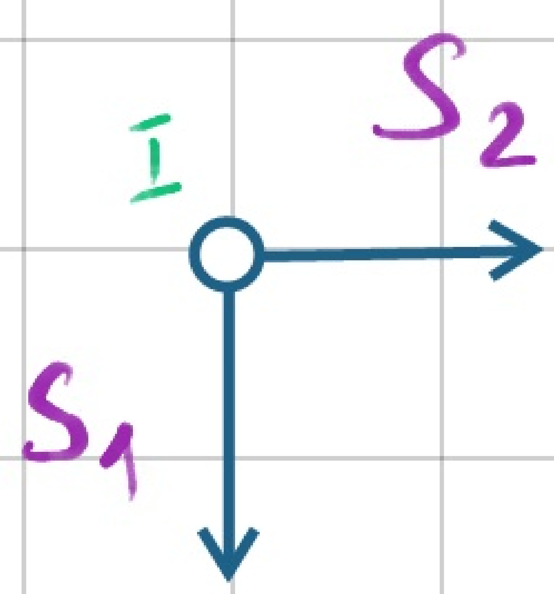
$\Sigma M_i^{VIII} : \quad -S_{10x} \cdot a + F_2 \cdot a = 0 \quad | : a$

$S_{10x} = F_2 \qquad \frac{2\sqrt{5}}{5} S_{10} = F_2$

$S_{10} = \frac{5}{2\sqrt{5}} F_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} F_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 20 = 10\sqrt{5}\,kN$

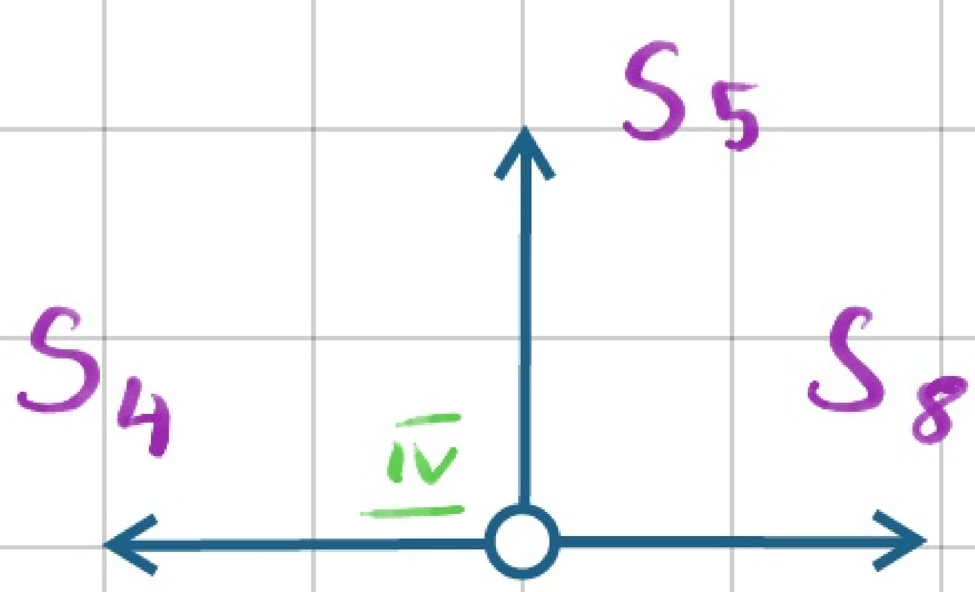
pręt 10 jest rozciągany

Siły w prętach 1, 5 i 13 nie są możliwe do wyznaczenia przy pomocy metody Rittera. Stąd też użyjemy metody wydzielania węzłów.

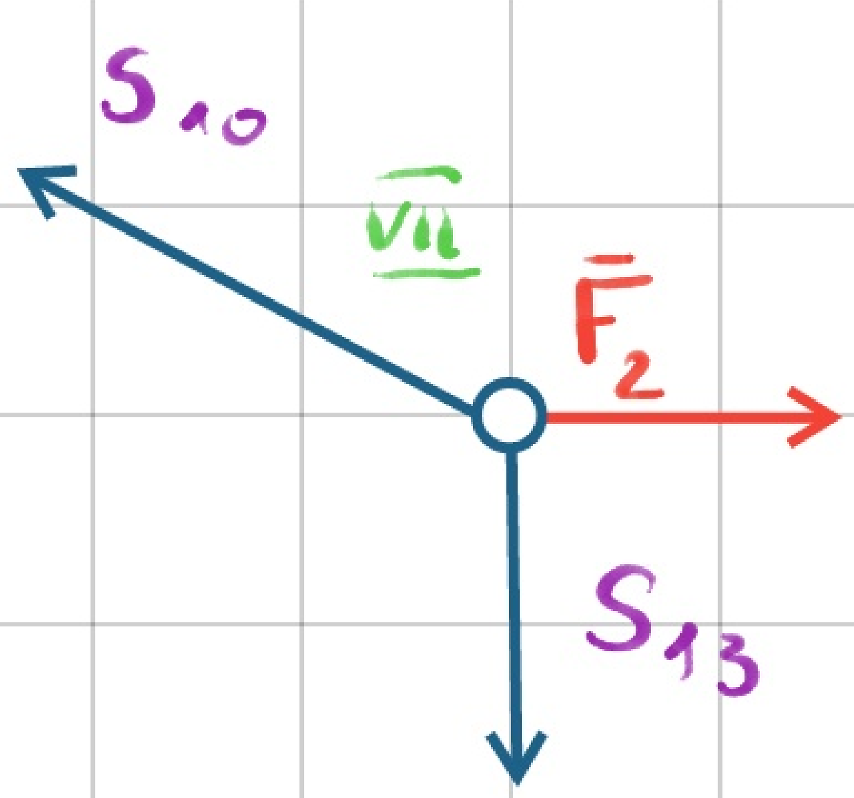


$$\sum F_{iy}: \; -S_1 = 0 \implies S_1 = 0$$

pręt 1 jest prętem zerowym



$$\sum F_{iy}: \; S_5 = 0$$



$$\sum F_{iy}: \; S_{10y} - S_{13} = 0$$

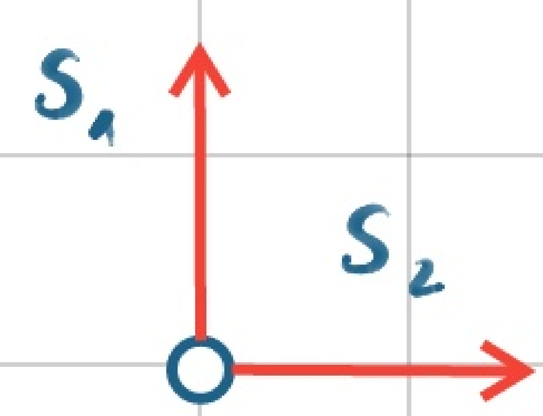
$$S_{13} = S_{10y}$$

$$S_{13} = \frac{\sqrt{5}}{}$$

Mamy wyznaczone siły we wszystkich prętach. Kilka spośród prętów ma siłę wewnętrzną równą zero. Pręty takie można zidentyfikować jeszcze przed przeprowadzeniem obliczeń.

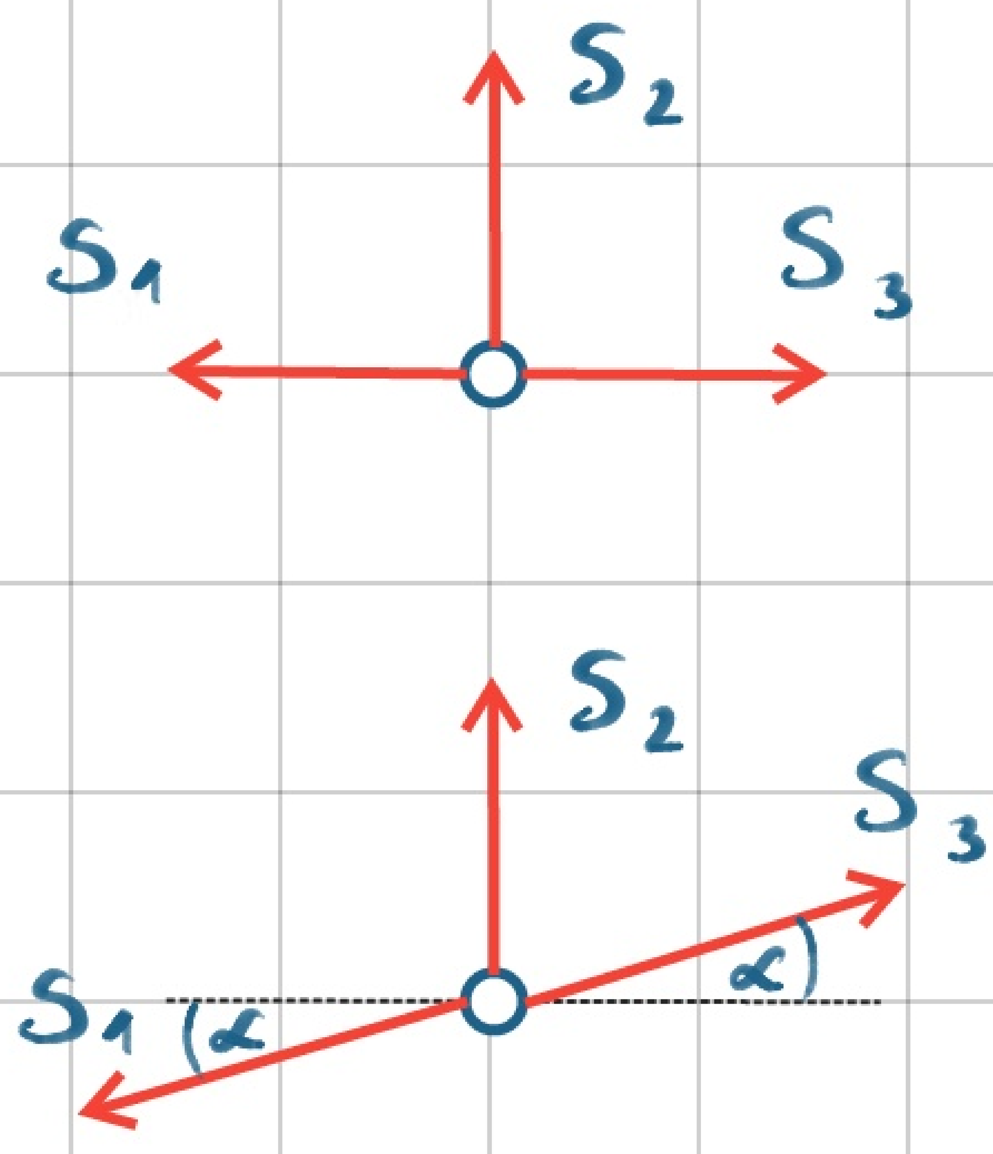
Jak je znaleźć?

1. Jeśli z węzła nieobciążonego wychodzą 2 pręty prostopadłe, to oba te pręty są prętami zerowymi.



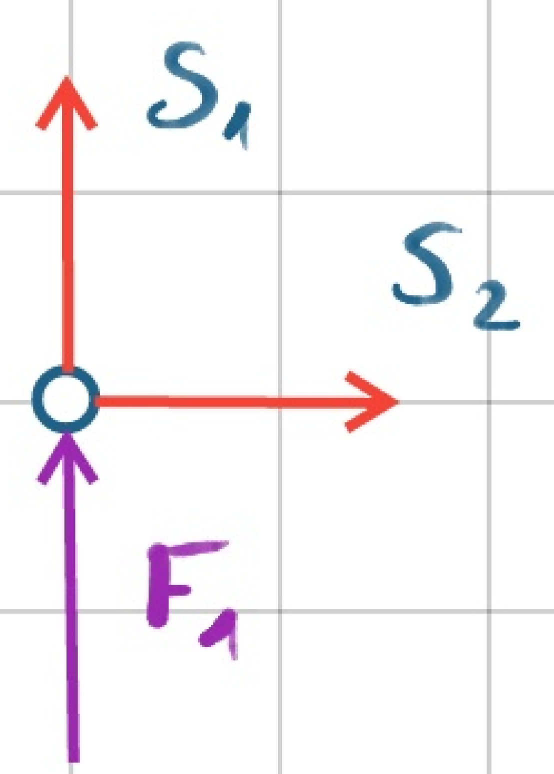
$\Sigma F_{ix}: \quad S_2 = 0$
$\Sigma F_{iy}: \quad S_1 = 0$

2. Jeśli z węzła nieobciążonego wychodzą 3 pręty, z czego dwa leżą na jednej linii, wówczas trzeci z tych prętów jest prętem zerowym.



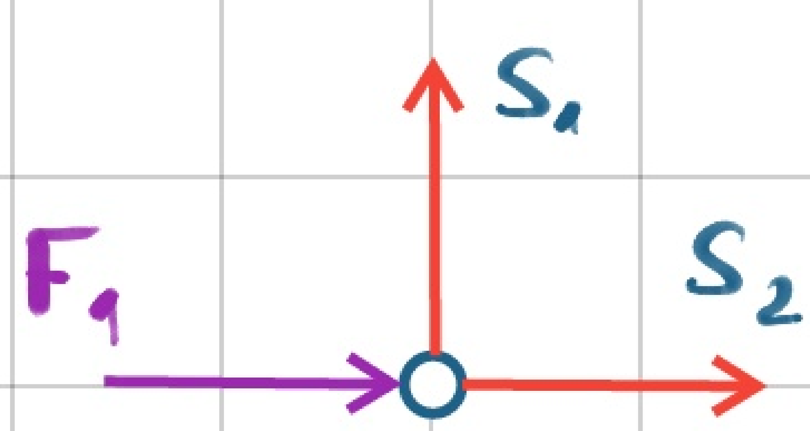
$\Sigma F_{ix}: \quad -S_1 + S_3 = 0$
$\Sigma F_{iy}: \quad S_2 = 0$

3. Jeśli z węzła obciążonego wychodzą dwa pręty z czego jeden z prętów pokrywa się z linią działania siły, wówczas drugi z tych prętów jest zerowy.



$\Sigma F_{ix}: \ S_2 = 0$

pręt 2 to pręt zerowy



$\Sigma F_{iy}: \ S_1 = 0$

pręt 1 to pręt zerowy

PODSUMOWANIE

Podczas wyznaczenia sił w prętach warto uzyskane wyniki zweryfikować. Czasem łatwo, wręcz bez obliczeń, wyznaczyć można pewne zależności np. w kratownicy, którą analizowaliśmy siły w prętach 4 i 8 muszą być równe, podczas gdy pręt 5 jest zerowy.