

Metody numeryczne w biomechanice

Jakub J. Słowiński Katedra Mechaniki i Inżynierii Materiałowej

Wrocław 2015



Wykład 1 Wprowadzenie

Jakub J. Słowiński Katedra Mechaniki i Inżynierii Materiałowej

Wrocław 2015



Niezbędnik

- Jakub J. Słowiński
- pokój 611 B1
- <u>www.kmim.wm.pwr.edu.pl/slowinski</u>
- jakub.slowinski@pwr.edu.pl
- konsultacje:
 - poniedziałek 13:15 15:15
 - środa 14:55 16:55
- zaliczenie:
 - pisemny egzamin (kolokwium na ostatnim wykładzie)
 - forma otwarta i zamknięta
 - 2 terminy (podstawowy i poprawkowy)



- połowa XIX w. pierwsze prace podejmujące problematykę rozwiązania złożonych problemów statyki poprzez kwantyzację obiektów ciągłych
- ~1950 r. możliwość zastosowania komputerów (maszyn liczących) do rozwiązywania problemów numerycznych
- 1956 opublikowany zostaje artykuł, w którym po raz pierwszy pojawia się pojęcie elementu skończonego w postaci znanej nam obecnie - M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin i L. J. Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", J. of Aero. Sci., 23 (9), Sept. 1956.



- prof. dr czł. PAN Olgierd Cecil Zienkiewicz
 - aktywny naukowo od 1943 roku do 1988 (później jako profesor emerytowany);
 - 1947 pierwszy artykuł dotyczący numerycznego przybliżenia rozkładu naprężeń w zaporach wodnych;
 - założyciel czasopisma International *Journal for Numerical Methods in Engineering*;
 - The Zienkiewicz Medal and £1000 Prize The Zienkiewicz Numerical Methods in Engineering Prize została ufundowana w 1998 roku przez wydawnictwo John Wiley & Sons Ltd. dla uczczenia pamięci prof. Zienkiewicza (1921-2009);



- lata 80-te upowszechnianie się komputerów osobistych o mocy wystarczającej do pierwszych obliczeń;
- lata 90-te zagadnienia wielkiej skali, procesory Intel Pentium, stacje robocze (Intel Xeon);
- 2005 praca dyplomowa, optymalizacja obliczeń
 → przyspieszenie obliczeń ok. 56000 razy (w pewnym zakresie oczekiwanego rezultatu)







Otaczające nas obiekty i procesy

- W otaczającym nas świecie istniejące obiekty i procesy dzielą się na rozmaite typy - ilość możliwych podziałów jest w zasadzie nieskończona.
- Część z tych obiektów lub procesów może nas interesować.
- Większość (jeżeli nie wszystkie te obiekty) cechuje wyższy stopień złożoności lub też uczestniczą one w złożonych procesach.

Wszystkie te obiekty i procesy mogą w razie potrzeby podlegać właściwej ich naturze analizie z wykorzystaniem odpowiednich metod i narzędzi.



Analiza

- analiza rozbiór, rozłożenie całości na składniki, elementy; badanie poszczególnych cech, właściwości zjawiska albo przedmiotu;
- etym. gr. análysis rozluźnienie, rozwiązanie, rozłożenie (Słownik wyrazów obcych i zwrotów obcojęzycznych Władysława Kopalińskiego).

Analiza to klucz do efektywnego projektowania.



Efektywne projektowanie

Dzięki efektywnemu projektowaniu można:

- wykonywać określone zadania z właściwą efektywnością
- oszczędzać ludzi, materiały, narzędzia, czas, ...
- zwiększyć bezpieczeństwo pracy ludzi, maszyn, obiektów, ...
- zwiększyć rentowność produkcji
- być przyjaznym środowisku, lokalnej społeczności

•••



Analizy inżynierskie

Analizy inżynierskie można prowadzić z pomocą odpowiedniego oprogramowania CAD, CAE, CAM

- CAD/CAM (Computer Aided Design/Manufacturing): AutoCad, SolidEdge, SolidWorks, CATIA, ProEngineer, Unigraphics/NX, ...
- CAE (*Computer Aided Engineering*): ABAQUS, LS-DYNA, ANSYS, NISA, MARC, ADINA, NASTRAN, COSMOS, FEAP, ALGOR, PATRAN, Pro-MECHANICA, ROBOT, SAP2000, ...



Metoda Elementów Skończonych - MES

MES (ang. *FEM - finite element method*) to metoda poszukiwania przybliżonego rozwiązania problemu poprzez aproksymację (dzięki dyskretyzacji) równań różniczkowych cząstkowych. Zakłada się, że każda wielkość (funkcja) ciągła w danym obszarze, może być opisana za pomocą wielu funkcji ciągłych w skończonej liczbie podobszarów, zwanych elementami.

Innymi słowy polega ona na podziale obiektu ciągłego (w skali makro) na pewną ilość skończonych obiektów (linii, powierzchni, objętości).



Metoda Elementów Skończonych

O czym zawsze należy pamiętać?

- uzyskujemy ROZWIĄZANIE PRZYBLIŻONE,
- komputer policzy (prawie) wszystko,
- ważne jest zweryfikowanie wyniku (doświadczalnie lub w odniesieniu do własnego doświadczenia).





Po co nam ten MES?

MES umożliwia prowadzenie analiz numerycznych.

Jakie analizy można prowadzić?

- mechanika konstrukcji
 - zagadnienia liniowe statyki, dynamiki, stateczności
 - zagadnienia nieliniowe geometrycznie i fizycznie
 - zagadnienia optymalizacji,
 - zmęczenie materiałów i konstrukcji
 - pękanie i pełzanie
- mechanika płynów
- przewodnictwo cieplne
- elektromagnetyzm

•••



Przykładowa analiza

uszkodzenie implantu wewnątrz organizmu pacjenta

Uszkodzenie implantu typu 1



Uszkodzenie implantu typu 2

Uszkodzenie implantu typu 2





Przykładowa analiza modele geometryczne kości udowej z implantami

Implant typu 1 stal <u>austenityczna</u>





Przykładowa analiza

modele dyskretne - szczelina złamania kości udowej





Przykładowa analiza

modele dyskretne - implanty



Rozkład naprężeń zredukowanych według hipotezy Hubera - von <u>Misesa</u> dla modelu kości ze złamaniem typu 3 według klasyfikacji <u>Kyle'a</u>



Wykład 2 Ansys - mini wprowadzenie do interfejsu użytkownika

Jakub J. Słowiński Katedra Mechaniki i Inżynierii Materiałowej

Wrocław, 2015



Ansys Product Launcher

File Management pozwala ustalić katalog, w którym będzie odbywać się analiza oraz nadać nazwę zadaniu.

Λ	11.0: AN	SYS Produc	t Launcher	[Profile: *** La	ast ANSYS Ru	n ***] ↔	_ 🗆 🗙
File Profiles	Options Tools L	inks Help					
Sin AN Lic AN	nulation Environme SYS ense: SYS Academic Res	e nt:	•		Add-or	Nodules elerator (-VTA)	
File Managemer	nt Customiza	tion/ / High ces Corr	Performance	/ MFX - ANSYS/0 Setup	CFX		
	Working Directory: Job Name:	D:\dokumenty	1			Browse Browse	
	Run		Cance	el Run	Produ	ct Help	



Ansys Product Launcher

Customization Preferences pozwala przydzielić odpowiednie zasoby pamięci, wybrać sterownik graficzny.

Λ	11.0: ANSYS	Product Launcher [Profile: *** La	ast ANSYS Run ***] 😁 🛛 🗖 🗙				
File Profiles	Options Tools Links	Help					
s A L	imulation Environment: NSYS icense: NSYS Academic Research		Add-on Modules				
File Managem	Customization/ ent Preferences	High Performance / MFX - ANSYS/C Computing Setup Setup	CFX				
	Memory Use custom memory se Total Workspace (MB): Database (MB):	ttings					
Cu	ustom ANSYS Executable:		Browse				
	(field is not valid for Distributed ANSYS / absolute path required)						
Ad	Iditional Parameters:						
		(-par1 val1 -par2 val2	.)				
AN	ISYS Language:	en-us					
Gr	aphics Device Name:	3D 💌					
•	Read START.ANS file at st	art-up					
	Run	Cancel Run	Product Help				



Ansys Product Launcher

HPC Setup pozwala ustalić liczbę procesorów (rdzeni) używanych w trakcie prowadzenia analizy (zależne od licencji).

Λ	11.0: ANSYS Produ	uct Launcher [Profile: *** La	st ANSYS Run ***] ↔ 🗕	X		
File Profiles	Options Tools Links Help					
Λ	Simulation Environment: ANSYS		Add-on Modules			
	ANSYS Academic Research	~				
File Manager	Customization/ Hig ment Preferences Co	h Performance VMFX - ANSYS/Computing Setup	DFX			
Type of High O None	Performance Computing (HPC) Ru	n.				
 Use Shared-Memory Parallel (SMP) Number of Processors 2 Use Distributed ANSYS 						
O Use Local Machine Only Number of Processors						
0	Specify Multiple Hosts					
	Available Hosts:	Selected Ho	New Host			
		Add ->	Edit			
0	Use MPI File		Browse			
(absolute path required)						
	Run	Cancel Run	Product Help			



Ansys - okno główne programu

File odpowiada za elementarne operacje plikowe,

- operacja wczytania procedury do wykonania *Read Input* from...
- operacja wczytania pliku z modelem geometrycznym *Resume from...*





Ansys - okno główne programu

Select odpowiada za operacje związane z selekcją obiektów, menedżer komponentów





Ansys - okno główne programu

List odpowiada za operacje listowania obiektów i ich właściwości





Ansys - okno główne programu

Plot odpowiada za operacje wyświetlania obiektów





Ansys - okno główne programu

PlotCtrls odpowiada za operacje związane z opcjami wyświetlania i sterowania ekranem





Ansys - okno główne programu

WorkPlane ustawienia układu odniesienia, tworzenie i aktywacja nowych układów, operacje translacji i rotacji układu

Λ	AN	SYS Academ	ic Research Utility Menu (model_1)		↔	_ 🗆 🗙
<u>File Select List Plot PlotCtrls</u>	WorkPlane Parameters Ma	ro Me <u>n</u> uCtrl	s <u>H</u> elp			
D D D D D D D ANSYS Toolbar SAVE_DB RESUM_DB QUIT POWR	Display Working Plane Show WP Status WP Settings Offset WP by Increments	_		- 3		
ANSYS Main Menu 🛞	Offset WP to					1 -
 Preferences Preprocessor Solution General Postproc TimeHist Postpro Topological Opt ROM Tool Design Opt Prob Design Radiation Opt Run-Time Stats Session Editor Finish 	Align WP with Change Active CS to Change Display CS to Local Coordinate Systems		х кх		JUN 4 2014 11:12:4(_ & # # # # # # # # # # # # # # # # # #
Pick a menu item or enter an ANSYS C	Command (BEGIN)	mat=1	type=1 real=1 csys=0	secn=1		



Ansys - okno główne programu

Parameters odpowiada za deklarowanie i zarządzanie parametrami modelu (skalarnymi i tablicowymi)





Ansys - okno główne programu

Zakładka File odpowiada za elementarne operacje plikowe,

- operacja wczytania procedury do wykonania *Read Input from...*
- operacja wczytania pliku z modelem geometrycznym *Resume from...*





Ansys - okno główne programu

MenuCtrls ustawienia wyglądu programu (kolory, czcionki, pasek narzędzi)

Zapamiętanie tych ustawień oraz ustawień okna programu (rozmiar, pozycja na ekranie zapewnia komenda Save Menu Layout.





Ansys - okno główne programu

Help odpowiada za pomoc programu. Jest to bardzo obszerna dokumentacja z przykładowymi plikami.





Ansys - okno główne programu

Menu Główne

Obecne po lewej stronie menu główne daje dostęp do niemal wszystkich komend programu Ansys.

Wprowadzony podział jest logiczny i ułatwia orientację w programie. Najczęściej stosowane moduły to Preprocessor, Solver i Postprocessor.





Ansys - okno główne programu

Menu boczne

Menu ustawiania modelu na ekranie głównym.

Pasek komend

Miejsce wprowadzania komend.

lkony skrótów

Ikony szybkiego dostępu do funkcji lub modułów.





Ansys - okno główne programu

Ansys Toolbar

Edytowalny pasek narzędzi i skrótów.

Pasek informacji

Miejsce informowania użytkownika o używanej w trybie graficznym komendzie i parametrach używanego materiału (numer materiału, typ elementu, stałe materiałowe, przekroje).





Główne moduły programu Ansys Preprocessor

Preprocesor - moduł umożliwiający opracowanie modelu geometrycznego, wprowadzenie i zadeklarowanie parametrów symulacji, zdefiniowanie warunków brzegowych (zamocowanie, obciążenie), wybór typu elementu i przeprowadzenie dyskretyzacji, określenie właściwości materiałowych i inne.


Główne moduły programu Ansys Solver

Solver - moduł umożliwiający wybór typu analizy, określenie warunków rozwiązania, wybór solvera, określenie zakresu wyników do zapisania w pliku wynikowym, zadanie warunków brzegowych, określenie sposobu obciążenia (liczba kroków vs skok czasowy), uruchomienie analizy nieliniowej i inne.



Główne moduły programu Ansys Postprocessor

Postprocesor - moduł umożliwiający prowadzenie obserwacji, analizy i opracowania rezultatów, przygotowanie raportu z analizy, opracowanie ścieżek, wzdłuż których prowadzona będzie szczegółowa analiza i inne.



APDL Ansys Parametric Design Language

- wewnętrzny język programu Ansys
- strukturalnie oparty na języku FORTRAN
- operacje na wektorach, tablicach i macierzach
- instrukcje przypisania i odwołania, pętle *do, pętle *if
- interaktywne menu użytkownika
- możliwość oskryptowania w Tcl/Tk
- opis komend dostępny w pomocy programu, ale także w trybie interaktywnym programu w dolnym lewym pasku
- liczne edytory z podświetleniem składni:
 - Context contexteditor.org,
 - Scite



Wykład 3 Wprowadzenie do MES

Jakub J. Słowiński Katedra Mechaniki i Inżynierii Materiałowej

Wrocław 2015



Metoda elementów skończonych

Metoda elementów skończonych służy rozwiazywaniu odpowiednio zdefiniowanych zagadnień brzegowych. Pozwala ciągły model matematyczny obiektu rzeczywistego dyskretyzować (podzielić na skończoną ilość elementów) a następnie dla tego modelu dyskretnego obliczyć interesującą wielkość fizyczną (naprężenie, temperaturę, odkształcenie, przemieszczenie, ...).



Metoda elementów skończonych

Jest to metoda przybliżona (patrz <u>slajd</u>). Uzyskiwane wyniki należy traktować z (dużą) ostrożnością jak również należy je zweryfikować doświadczalnie - przeprowadzić walidację modelu numerycznego.

Im większa baza doświadczalna tym łatwiejsze w interpretacji rezultaty pozyskane w efekcie prowadzonych symulacji numerycznych.



Główne etapy MES







Główne etapy MES

- Preprocessing opracowanie modelu obliczeniowego
 - model geometryczny (jednostki);
 - wybór typu elementu skończonego;
 - dyskretyzacja modelu geometrycznego;
 - warunki brzegowe:
 - właściwości materiałowe;
 - sposób i miejsce obciążenia;
 - sposób i miejsce mocowania (10000)





Model geometryczny

- parametryczny model CAD (AutoCad, SolidWorks, CATIA, ...)
- import danych medycznych (RTG, CT)







Model geometryczny

- wolnodostępne oprogramowanie wspierające format DICOM oraz STL i IGES
 - Paraview rozbudowana przeglądarka z bardzo szerokim wachlarzem akceptowanych formatów, złożony interfejs
 - 3Dim prosta przeglądarka z możliwością tworzenia modeli wolumetrycznych i generowania pliku STL
 - Slicer3d złożona przeglądarka o mocno rozbudowanym interfejsie i możliwościach
 - InVesalius przeglądarka z możliwością tworzenia modeli wolumetrycznych i generowania pliku STL, ręczna i automatyczna segmentacja z możliwością edycji każdej warstwy





Model geometryczny

- Technika tworzenia modelu geometrycznego:
 - bottom-up: punkty \rightarrow linie \rightarrow powierzchnie \rightarrow objętości
 - top-down: gotowe prymitywy (prostokąt, kula, walec, ...)
- Operacje logiczne Boole'a
 - btol,1e-4
 - kolejność (priorytet) operacji na obiektach w razie niepowodzenia





Model geometryczny

operacja przecinania objętości







Model geometryczny - STL i IGES

Geometria modelu stworzona w niezależnym programie może być importowana do środowiska programu Ansys.

Umożliwia to pracę na modelach, których stworzenie z pomocą komend lub interfejsu graficznego użytkownika byłoby niemożliwe lub nieopłacalne.

STL - Standard Tesselation Language / Stereolitography

IGES - Initial Graphics Exchange Specification





Wybór typu elementu skończonego

- Zakres stosowalności elementu - typ elementu determinuje możliwości prowadzenia analizy.
- Elementy: prętowe, belkowe, tarczowe, powłokowe, objętościowe, rurowe,
- Elementy wyższego i niższego rzędu
- Symetria zagadnień
- Zagadnienie 2D vs 3D

LINK1 Element Description

LINK1 can be used in a variety of engineering applications. Depending upon the application, you can think of the element as a truss, a link, a spring, etc. The 2-D spar element is a uniaxial tension-compression element with two degrees of freedom at each node: translations in the nodal x and y directions. As in a pin-jointed structure, no bending of the element is considered. See <u>LINK1</u> in the <u>Theory Reference for ANSYS and ANSYS Workbench</u> for more details about this element. See <u>LINK8</u> for a description of a 3-D spar element.





Dyskretyzacja

- Gęstość podziału (rozmiar elementu skończonego)
 - ręczne i automatyczne określenie rozmiaru elementu skończonego
 - hierarchia dyskretyzacji
- Siatka typu *free* i *mapped*
- Zasoby sprzętowe i czasowe





Model geometryczny -> model numeryczny

- wyróżnienie skończonej liczby węzłów;
- określenie wielkości węzłowych, które będą aproksymowane (np. naprężenie, odkształcenie);
- podział całego analizowanego obszaru na skończona liczbę tzw.
 elementów skończonych (np. sześcianów lub czworościanów);
- dla wybranych w analizie elementów skończonych określone zostają tzw. funkcje kształtu, które w sposób jednoznaczny określają rozkład poszukiwanej wielkości we wnętrzach elementów.





Model geometryczny -> model numeryczny

- składanie funkcji kształtu do funkcji bazowych w zakresie podobszaru lub całego obszaru modelu numerycznego;
- Zbiór kombinacji wszystkich funkcji bazowych stanowi przestrzeń możliwych rozwiązań, w której poszukujemy rozwiązania konkretnego.



Warunki brzegowe





Główne etapy MES

- Opracowanie warunków symulacji
 - typ analizy (statyczna, wyboczeniowa, modalna, harmoniczna, przejściowa, ...
 - analiza 2D/3D (vide wybór elementu skończonego)
 - zagadnienie symetryczne/osiowosymetryczne
 - analiza liniowa/nieliniowa (geometrycznie, materiałowo)
 - geometrycznie odkształcenie > 5%
 - wybór typu solvera (**Sparse**, PCG, Front)
 - obciążenie modelu (efekty kolejnych obciążeń kumulują się)
 - warunki brzegowe





Obciążenie modelu

- siły skupione, powierzchniowe, objętościowe (zagadnienie nieważkie!)
- występuje superpozycja efektów obciążenia
- obciążenie: stałe, zadawane stopniowo (*Ramped*) lub skokowo (*Stepped*) (analizy nieliniowe)
- symetria osiowa





Główne etapy MES

Postprocessing

- wizualizacja wyników (deformacja struktury, mapy naprężeń, odkształceń i przemieszczeń)
 - naprężenie zredukowane $\sigma_{\rm eqv}$ musi być w zakresie sprężystym mniejsze od granicy plastyczności materiału R_{\rm e}
- analiza pozyskanych rezultatów
- przygotowanie danych do raportu
- testowanie zbieżności rozwiązania
 - poprzez zagęszczenie siatki
 - zmiana elementu niższego rzędu na wyższy rząd przy zachowaniu tej samej ilości elementów





Wizualizacja wyników

- mapa przemieszczeń
 - auto scale, true scale, off, user
 - Auto scale skala automatyczna zakłada, że prezentowane przemieszczenia węzłowe będą wynosić 10% maksymalnego wymiaru geometrycznego analizowanego modelu, nie ma związku z rzeczywistością
 - True scale przedstawia przemieszczenia węzłowe zgodne z wymiarami rzeczywistymi obiektu
 - Off niezmienność geometryczna obiektu
 - User skala użytkownika, przydatna w przypadku obserwacji tendencji odkształceń, szczególnie w przypadku, kiedy są one niewielkie w odniesieniu do obiektu
- skala wyniku
 - mapa konturowa, mapa gradientowa, mapa dyskretna/ciągła
- "wynikowy" układ odniesienia RSYS



Błędy MES¹

- błąd modelowania (zastosowany model matematyczny nie odzwierciedla dokładnie* rzeczywistości);
- błąd wartości współczynników (przyjęte wartości współczynników i warunków brzegowych, czyli np. dane materiałowe, dane o interakcji obiektu ze światem zewnętrznym obarczone są błędem);
- błąd odwzorowania obszaru (obszar obliczeniowy nie odpowiada dokładnie rzeczywistemu obszarowi zajmowanemu przez analizowany obiekt);

W rzeczywistości model matematyczny nigdy tego nie robi, ale można spodziewać się, że model jest mniej lub bardziej dokładny (np. stopień wielomianu przybliżenia).



Błędy MES

- błąd numeryczny (błąd dyskretyzacji, zastosowana metoda aproksymacji wprowadza błąd w stosunku do rozwiązania dokładnego problemu wyjściowego);
- błąd zaokrągleń (ze względu na zastosowanie ograniczonej dokładności reprezentacji liczb w komputerze, rozwiązanie uzyskane programem komputerowym nie odpowiada rozwiązaniu przybliżonemu, które zostałoby otrzymane przy dokładnej reprezentacji liczb);



Wykład 4 Funkcje kształtu

Jakub J. Słowiński Katedra Mechaniki i Inżynierii Materiałowej

Wrocław 2015



Co to są funkcje kształtu?

- Funkcje kształtu to funkcje interpolacyjne umożliwiające aproksymację danej wielkości fizycznej w elemencie. Interpolują przemieszczenie węzłowe w obszarze elementów. Służą także do obliczania macierzy sztywności oraz odkształceń i naprężeń wewnątrz modelu.
- Ich liczba w elemencie jest zawsze równa liczbie węzłów.



Co to są funkcje kształtu?

W obrębie danego węzła, którego dotyczy, funkcja kształtu jest tak skonstruowana, że jej wartość wynosi 1, podczas gdy w pozostałych węzłach równa jest 0.





Liczba stopni swobody

- Liczba stopni swobody dla pojedynczego elementu w klasycznym ujęciu MES równa jest liczbie węzłów tworzących ten element w iloczynie z liczbą stopni swobody w tym węźle.
- $m=n_e^*s_w$
 - m liczba stopni swobody elementu
 - n_e liczba węzłów elementu
 - s_w liczba stopni swobody węzła



Liczba stopni swobody

$$u^{EX}(x) \approx u(x) = \sum_{k=1}^{m} u_k \times N_k(x)$$

gdzie:

 $u^{EX}(x)$ - rozwiązanie ścisłe zagadnienia u(x) - przybliżona funkcja przemieszczeń $u_k(x)$ - stopnie swobody struktury $N_k(x)$ - funkcje kształtu związane z k-tym węzłem m - liczba stopni swobody modelu MES



Co to są funkcje kształtu?

- Funkcje kształtu $N_k(x)$ są definiowane osobno dla każdego stopnia swobody w węźle elementu.
- Aby funkcja kształtu prawidłowo interpolowała przemieszczenia węzłowe musi spełniać określone warunki:
 - kryterium zgodności, zapewnienie ciągłości przemieszczeń w obszarze elementu i zgodności pól przemieszczeń na granicach sąsiadujących elementów;
 - kryterium ruchu sztywnego, taki dobór funkcji kształtu, aby podczas ruchu elementu jako ciała sztywnego nie powstawały w nim naprężenia (spełnienie kryterium zapewniają składniki stałe i liniowe);
 - kryterium stałych odkształceń, poprawne odwzorowanie stałych odkształceń.



Co to są funkcje kształtu?

- <u>Elementy, które spełniają wszystkie z podanych warunków</u> <u>nazywamy elementami zgodnymi (dostosowanymi), natomiast</u> <u>elementy spełniające dwa ostatnie warunki, elementami zupełnymi</u> <u>(niedostosowanymi).</u>
- O tym, jaki jest element, decyduje przyjęta funkcja kształtu.
- Funkcje kształtu buduje się przy wykorzystaniu:
 - ciągów Pascala;
 - wielomianów Langrange'a;
 - wielomianów Hermite'a.



Funkcja kształtu element 1D - linka z ciężarem - zagadnienie liniowe

Dla zagadnienia 1D funkcje kształtu buduje się w oparciu o ciąg Pascala.

Wektor przemieszczeń:

$$\{V\}_{el} = \begin{cases} u_{xi} \\ u_{xj} \end{cases}$$





Funkcja kształtu element 1D - linka z ciężarem - zagadnienie liniowe

Funkcja kształtu jest jednowymiarowym ciągiem Pascala. Opis przemieszczeń daje się zapisać jako:

 $u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$

Funkcja taka jest ciągła w elemencie wraz z jego granicami, zapewnia możliwość opisania stałych przemieszczeń:

 $u(x) = \alpha_1$

Zapewnia także możliwość opisania stałych odkształceń:

$$\frac{\delta u(x)}{\delta x} = \varepsilon_x = \alpha_2 = const$$

Element cięgnowy jako spełniający wszystkie trzy założenia można zaliczyć do elementów zgodnych.



Funkcja kształtu

element 1D - linka z ciężarem - zagadnienie liniowe

Sytuacja taka jest dobrym przybliżeniem, kiedy mówimy o zjawisku liniowym np. linka jest stalowa i jej odkształcenia przy działającym ciężarze można przybliżyć funkcją liniową. Kiedy natomiast zagadnienie staje się nieliniowe - np. linka stalowa zostaje zastąpiona linką nylonową, która ulega znacznemu rozciąganiu, przybliżenie liniowe będzie prowadzić do powstawania znaczących błędów.

Żeby temu zapobiec, należy do obliczeń przyjąć element skończony wyższego rzędu - przyjąć w węzłach dodatkowe stopnie swobody w postaci pochodnych: u'_{xi} i u'_{xj} .



Funkcja kształtu

element 1D - linka z ciężarem - zagadnienie nieliniowe



Wektor przemieszczeń:

$$\{V\}_{el} = \begin{cases} u_{xi} \\ u'_{xi} \\ u_{xj} \\ u'_{xj} \end{cases}$$



Funkcja kształtu element 1D - linka z ciężarem - zagadnienie liniowe

Funkcja kształtu (trzeciego rzędu) jest zatem funkcją czterech parametrów.

Opis przemieszczeń daje się zapisać jako:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

Odkształcenie wówczas będzie równe:

$$\varepsilon(x) = \alpha_2 + \alpha_3 2x + \alpha_4 3x^2$$

Odkształcenie będzie zatem opisane równaniem kwadratowym i będzie już dobrym przybliżeniem nieliniowego zachowania się materiału.

Elementy wyższego rzędu ← podwyższenie stopnia funkcji opisujących przemieszczenia.


Funkcje kształtu - element 2D

funkcji Dobór kształtu dla elementów 2D można zrealizować na bazie trójkąta Pascala, przy czym istotny jest sposób doboru składników wielomianu - należy unikać składników uprzywilejowanych.

3

10

5

1

5

10

funkcje stałe funkcje liniowe

funkcje sześcienne funkcje IV-go rzędu funkcje V-go rzędu





Funkcje kształtu - element 2D

element trójkątny - trójkąt Couranta

Wektor przemieszczeń węzłowych:

 $\{V\}_{el}^{T} = \left[u_{x_{1}}, u_{y_{1}}, u_{x_{2}}, u_{y_{2}}, u_{x_{3}}, u_{y_{3}}\right]^{T}$

Funkcja kształtu dla dowolnego punktu:

$$u_x = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

 $u_y = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$

Element spełnia warunek zgodności przemieszczeń, składniki liniowe zapewniają przemieszczenie stałe:

 $u_x = \alpha_1 = const$ $u_y = \alpha_4 = const$



Trójkąt CST (Constant Strain Triangle) Element o stałych odkształceniach



Funkcje kształtu - element 2D

element trójkątny - trójkąt Couranta

Element spełnia warunek stałych odkształceń:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$
 $\varepsilon_x = \alpha_2 = const$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$
 $\varepsilon_y = \alpha_6 = const$

W całym elemencie odkształcenia przyjmują stałą wartość.

W elemencie takim przemieszczenia zmieniają się liniowo wzdłuż brzegu, ale ich stałe pochodne nie zapewniają ciągłości odkształceń na styku elementów - zmieniają się one skokowo i tylko zagęszczenie siatki przybliża wynik do rzeczywistości.

Jest to element niedostosowany.



Trójkąt CST (Constant Strain Triangle) Element o stałych odkształceniach



Funkcje kształtu - element 2D

element trójkątny - trójkąt Couranta

Funkcja kształtu: 6 węzłów po 2 stopnie swobody daje 12 parametrów.

 $u_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 x y + \alpha_6 y^2$ $u_y(x, y) = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} x^2 + \alpha_{11} x y + \alpha_{12} y^2$

Odkształcenia zatem wynoszą:

$$\varepsilon_x = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y$$
$$\varepsilon_y = \alpha_9 y + \alpha_{11} x + 2\alpha_{12} y$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = (\alpha_3 + \alpha_8) + (\alpha_5 + 2\alpha_{10})x + (\alpha_{11} + 2\alpha_{10})y$$

i są jak widać funkcjami liniowymi, dzięki czemu element LST jest dokładniejszy niż element CST.



Trójkąt LST (Linear Strain Triangle) Element trójkątny o liniowych odkształceniach



Wykład 5 Elementy skończone

Jakub J. Słowiński Katedra Mechaniki i Inżynierii Materiałowej

Wrocław, 07.01.2016



Element skończony

- Element skończony to skończony obszar (jeden z wielu), na które podzielony został obiekt (model) ciągły. Odpowiedni rozkład danej wielkości w obrębie modelu zapewnia odpowiednio dobrana funkcja kształtu.
- W programie Ansys dostępna jest biblioteka ponad 200 elementów skończonych (A v.11 - 206 elementów). Lista elementów dostępna jest w pomocy programu -
- Help / help topics / Element Reference / Element Library.



Klasyfikacja elementów (Ansys 16.2)

STRUCTURAL			
Typ analizy	Wymiar	Element	Rysunek
Structural Solid	3D	SOLID185 8-Node	
		SOLID186 20-Node	
		SOLID187 10-Node	

help/ans_elem/Hlp_E_CH3_Classifications.html



LINK180

- Element LINK180 jest elementem 3D, dwuwęzłowym, posiadającym jedynie dwa stopnie swobody translacje w kierunku x oraz y. Można zadeklarować pole jego przekroju oraz odkształcenie wstępne.
- W elemencie tego typu nie jest uwzględnione zginanie.
- Nadaje się do modelowania kratownic (nie może powstać mechanizm), kabli, cięgien, sprężyn, itd.
- Posiada 3 translacyjne stopnie swobody.





LINK180 - kratownica



Przemieszczenia węzłowe w dwuwymiarowej kratownicy modelowanej elementami prętowymi (u góry prawidłowy podział linii) - musi obowiązywać niezmienność geometryczna



BEAM188

- BEAM188 jest elementem dwuwęzłowym, posiadającym 6 lub 7 stopni swobody - translacje i rotacje we wszystkich kierunkach, opcjonalnie wypaczenie belki.
- Można zadeklarować pole jego przekroju, moment bezwładności, wysokość, odkształcenie wstępne.
- Element tego typu uwzględnia zginanie, nadaje się do modelowania np. ram.





BEAM189

• BEAM189 jest elementem trójwęzłowym (zakrzywionym, z węzłem pośrednim), posiadającym 6 lub 7 stopni swobody - translacje i rotacje we wszystkich kierunkach, opcjonalnie wypaczenie belki.





BEAM188 i BEAM189

- Elementy tego typu umożliwiają przedstawienie mapy wytężenia dla całej konstrukcji z wykorzystaniem polecenia /eshape,1.
- Nadają się do modelowania ram możliwość przekazania momentu gnącego.



Elementy cięgnowe i belkowe

- Elementy cięgnowe i belkowe pozwalają prawidłowo obliczyć przemieszczenia i naprężenia między węzłami, ale nie uwzględniają koncentracji naprężeń w węzłach, nawet jeśli elementy zmieniają średnice (wysokość).
- Problem karbu w tego typu konstrukcjach należy rozwiązywać z wykorzystaniem elementów bryłowych lub powłokowych. Jest to tzw. technika submodelingu.



Element tarczowy PLANE182

Element tarczowy PLANE182 jest elementem 2D niższego rzędu, 4wezłowym w płaszczyźnie x-y, posiadającym 2 translacyjne stopnie swobody w kierunku x oraz y.

Elementy tego typu nadają się do analiz: płaskiego stanu naprężenia (o jednostkowej grubości elementu), stanu osiowosymetrycznego, płaskiego stanu odkształcenia i płaskiego stanu naprężenia (z zadaną grubością).





Element tarczowy PLANE183

Element tarczowy PLANE183 jest elementem 2D wyższego rzędu, 8-węzłowym w płaszczyźnie x-y, posiadającym jedynie dwa stopnie swobody - translacji w kierunku x oraz y. Możliwe jest stosowanie 6-węzłowych elementów typu tetra.

Mogą odtwarzać stan osiowosymetryczny





PLANE183

Krzywoliniowe elementy dobrze odwzorowują złożoną geometrię np. przekroje obiektów biologicznych.





PLANE182 i PLANE183

Elementy PLANE182 i PLANE183 są elementami nowego typu, odpowiednikami elementów PLANE42 i PLANE82, w których dodano między innymi możliwość ustawienia układu współrzędnych elementu poprzez komendę ESYS, co stanowi podstawę do analiz z wykorzystaniem materiałów ortotropowych.



Elementy powłokowe SHELL181 i SHELL281

Elementy powłokowe SHELL służą do modelowania konstrukcji cienkościennych np. zbiorniki ciśnieniowe, płyty, dźwigary skrzynkowe. Mogą odwzorowywać stan błonowy i stan gięty, możliwe jest tworzenie powłok wielowarstwowych i zmiennych właściwościach mechanicznych SHELL181(281) jest elementem 4(8)-węzłowym o 6 stopniach swobody (translacje i rotacje we wszystkich kierunkach).





Potrzeba zastosowania elementów 3D

Elementy bryłowe służą do modelowania obiektów o skomplikowanych kształtach, obiektów grubościennych oraz węzłów konstrukcyjnych.





Potrzeba zastosowania elementów 3D

Skomplikowana geometria daje się wygodnie dzielić na elementy typu tetrahedrycznego.













































Elementy bryłowe - SOLID185

Element bryłowy SOLID185 jest elementem 3D niższego rzędu, 8-wezłowym, posiadającym trzy translacyjne stopnie swobody. Możliwe jest stosowanie 4-węzłowych elementów typu tetra. Z elementów tych można korzystać się w pierwszych analizach modelu lub tam gdzie niekorzystne jest stosowanie elementów z funkcjami kształtu wyższego rzędu.

Element bryłowy SOLID185 nadaje się do modelowania obiektów homogenicznych jak również warstwowych.



Elementy bryłowe - SOLID185





Elementy bryłowe - SOLID186

Element bryłowy SOLID186 jest elementem 3D wyższego rzędu, 20-wezłowym, posiadającym trzy translacyjne stopnie swobody. Możliwe jest stosowanie 4-węzłowych elementów typu tetragonalnego. Element bryłowy SOLID186 nadaje się do modelowania obiektów homogenicznych jak również warstwowych



Elementy bryłowe - SOLID186





Elementy bryłowe - SOLID187

- Element bryłowy SOLID187 jest elementem 3D wyższego rzędu, 10-wezłowym, posiadającym trzy stopnie swobody - translacje w kierunku x, y oraz z.
- Doskonale odwzorowuje obiekty geometrycznie nieregularne (obiekty Z[×]
 biologiczne, skomplikowane krzywoliniowe detale).





Dyskretyzacja *free* i *mapped*

- FREE podział (automatyczny) na elementy typu tetra; niekorzystny gdyż osie układu elementu nie pokrywają się z osiami układu globalnego, przenoszenie wyników między układami zachodzi z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych,
- MAPPED podział na elementy typu quad, boki elementów są równoległe do boków obiektu






Elementy do podziału - MESH200

Przydatnym typem elementu jest element MESH200, który służy do wstępnej dyskretyzacji obiektu. Pozwala np. przy trudnej do podziału objętości wprowadzić początkowy podział powierzchni, co może w znacznym stopniu, bez potrzeby tworzenie podobjętości, ułatwić nałożenie siatki na pełną objętość.



Wykład 6 Dyskretyzacja, selekcja, układy współrzędnych

Jakub J. Słowiński Katedra Mechaniki i Inżynierii Materiałowej

Wrocław 2015



Dyskretyzacja

Dyskretyzacja jest to podział ciągłego modelu geometrycznego na określonego typu elementy skończone.





Zasady dyskretyzacji

Podział na elementy skończone powinno się prowadzić stosując kilka kryteriów:

- zakres stosowalności elementu;
- typ analizy (przepływ cieczy, przepływ ciepła, analiza pękania, dynamika, statyka, ...);
- zagadnienie 2D lub 3D;
- geometria obiektu symetria vs asymetria;
- wymagana dokładność i możliwość przybliżenia;
- czas i zasoby sprzętowe.



Dyskretyzacja





Dyskretyzacja typ elementu





Dyskretyzacja gęstość podziału





Dyskretyzacja obiekt ciągły





Dyskretyzacja gęstość podziału





Węzły



Dyskretyzacja

Dyskretyzacja, czyli podział ciągłego modelu geometrycznego na elementy skończone, to drugi, po modelowaniu geometrii, ważny etap każdej analizy numerycznej prowadzonej metoda elementów skończonych.



Hak laminarny



Dyskretyzacja



Model objętościowy - elementy skończone



Rozmiar elementu

Wielkość elementu skończonego nie tylko może ale czasem wręcz powinna być zróżnicowana. Zagęszczenie siatki (zmniejszenie rozmiaru) elementów skończonych powinno się przeprowadzić wszędzie tam, gdzie spodziewana jest koncentracja naprężeń oraz tam gdzie planuje się uzyskać dokładniejszy rozkład analizowanej wielkości fizycznej.



Rozmiar elementu





Siatka podstawowa

Siatka zmodyfikowana



Rozmiar elementu - komendy

- **ESIZE** globalny rozmiar elementu
- **KESIZE** rozmiar elementu w pobliżu wskazanego punktu
- LESIZE rozmiar elementu w obrębie linii
- AESIZE rozmiar elementu w obrębie powierzchni



ESIZE

Komenda **ESIZE** służy do ustalenia rozmiaru elementu w obrębie **całego** modelu geometrycznego.

ESIZE, SIZE, NDIV

- SIZE rozmiar elementu
- NDIV liczba elementów, stosowane kiedy SIZE=0



























KESIZE

Komenda **KESIZE** służy do ustalenia rozmiaru elementu w obrębie określonego punktu modelu geometrycznego.

KESIZE, NPT, SIZE, FACT1, FACT2

- NPT numer punktu, z którym związane linie będą miały ustalany rozmiar elementu
- SIZE rozmiar elementu
- FACT1, FACT2 współczynniki skali











Komenda **KESIZE** powinna być stosowana

- we wklęsłościach modelu geometrycznego;
- w promieniach zaokrągleń;
- w punktach przyłożenia sił skupionych.



LESIZE

Komenda LESIZE służy do ustalenia rozmiaru elementu w obrębie określonych linii modelu geometrycznego.

LESIZE, NL1, SIZE, ANGSIZ, NDIV, SPACE, KFORC, LAYER1, LAYER2, KYNDIV

- NL1 numer linii dla której będzie ustalany rozmiar elementu
- SIZE rozmiar elementu
- ANGSIZ podział łuku (w stopniach)
- NDIV liczba elementów podziału linii
- SPACE współczynnik podziału



LESIZE space=6





LESIZE space=4





LESIZE space=-4





LESIZE space=-1/4





LESIZE space=1/4





Zalecenia przy dyskretyzacji

Zagęszczenie siatki powinno mieć miejsce wszędzie tam gdzie:

- pojawiają się załomy konstrukcji, karby, promienie zaokrąglenia;
- spodziewana jest koncentracja naprężeń;
- przykładane są siły skupione;
- potrzebna jest dokładniejsza, bardziej drobiazgowa analiza.



Zalecenia przy dyskretyzacji

- elementy prostokątne są dokładniejsze od elementów trójkątnych;
- zaleca się możliwie rzadkie stosowanie elementów trójkątnych i czworościennych (liniowych);
- elementy zwarte są dokładniejsze od wydłużonych;
- elementy wyższego rzędu (z węzłami pośrednimi) są dokładniejsze od elementów liniowych przy tej samej liczbie węzłów;



Selekcja

- W selekcji wyróżnia się 4 możliwe działania:
 - From Full wybór z pełnego zakresu;
 - Reselect wybór z podzakresu (reselekcja);
 - Also Select wybór dodatkowy;
 - Unselect odselekcjonowanie.
- Selekcja odbywa się dzięki poleceniu xSEL, zatem zgodnie z filozofią języka APDL będzie to KSEL, LSEL, ASEL, VSEL, ESEL, NSEL, CMSEL odpowiednio dla punktów, linii, powierzchni, objętości, elementów, węzłów, komponentów.



Selekcja

- W selekcji wyróżnia się 4 możliwe działania:
 - From Full wybór z pełnego zakresu;
 - Reselect wybór z podzakresu (reselekcja);
 - Also Select wybór dodatkowy;
 - Unselect odselekcjonowanie.





Selekcja po współrzędnych





Selekcja

- Selekcji podlegają składowe modelu zarówno na etapie modelu geometrycznego jak i skończonego. Istnieje kilka trybów i wariantów selekcji, co w znacznym stopniu ułatwia przygotowanie modelu, przeprowadzenie analizy jak i opracowanie wyników.
- Selekcji w połączeniu możliwością tworzenia komponentów daje znaczne przyspieszenie prac - etap ręcznej selekcji bez parametryzacji nawet w przypadku nieznacznego skomplikowania modelu ogromnie spowalnia pracę jak również wymaga od użytkownika znacznego (!) wysiłku.



Układy współrzędnych

Na każdym etapie tworzenia modelu i analizy uzyskanych wyników mamy możliwość tworzenia, kasowania i odwoływania się do określonych układów współrzędnych.

Istnieje wiele rodzajów takich układów - stąd poniższy podział.


Układy współrzędnych

- Ranga układu:
 - globalny układ kartezjański, nie podlega edycji, przypisany ma numer
 0
 - lokalny dowolnego typu, tworzone przez użytkownika, numeracja od 11 do 40
 - kartezjański CSO
 - cylindryczny CS1 (oś obrotu Z)
 - sferyczny CS2
 - cylindryczny CS5 (os obrotu Y)
- Klasa układu:
 - wyświetlania
 - węzłowy
 - elementu



Globalny układ współrzędnych

Podstawowy układ współrzędnych, nie podlega edycji (translacji, rotacji), nie można go skasować. Zdefiniowane są 4 typy:

- 0 kartezjański;
- 1 walcowy (oś obrotu Z);
- 2 sferyczny;
- 5 walcowy (oś obrotu Y).





Lokalny układ współrzędnych

- Możliwe jest stworzenie, na bazie układu globalnego, lokalnego układu odniesienia o numeracji z zakresu 11 40.
- Układ taki po stworzeniu można dowolnie przemieszczać (translacja i rotacja).
- W celu użycia nowego układu należy go aktywować, do czego służy polecenie CSYS, nr_układu.
- Powrót do globalnego układu kartezjańskiego zapewnia polecenie CSYS, 0.



Płaszczyzna robocza

Płaszczyzna robocza (Working Plane - WP) powstaje na bazie osi układu X i Y. Wiele operacji odnosi do płaszczyzny roboczej i kluczowa dla nich jest jej orientacja.

Przykładowo tworzenie objętości walca odbywa się zawsze wedle WP. W płaszczyźnie X-Y powstaje koło o zadanych parametrach a wedle osi z jest ono wyciągane tworząc objętości walca. Także cięcie figur, prymitywów czy całych modeli odbywa się przy wykorzystaniu tej płaszczyzny jako płaszczyzny cięcia.



Transformacja geometrii między układami odniesienia

Czasem podczas tworzenia lub importu geometrii z zewnętrznego pliku zachodzi potrzeba przeniesienia jej miedzy układami współrzędnych. Dużo łatwiej jest zorientować dwa osobne układy i dokonać transformacji elementu geometrii niż przeliczać faktyczny dystans miedzy dwoma położeniami (translacja i rotacja). Korzystnie zatem jest przeprowadzić procedurę TRANSFORMACJI:

- objętości VTRAN
- powierzchni ATRAN
- linii LTRAN
- punktów KTRAN