Wykład 1 - 05.03.2021

Mechanika - gałąź nauki z obszaru fizyki;
opisuje zależności między ciałami wywołane siłami działającymi w określonych warunkach ruchu i/lub równowagi

Rozwój fizyki i mechaniki to nie tylko osiągnięcie ostatnich kilkuset lat. Trzeba zdawać sobie sprawę, że dorobek cywilizacyjny zawdzięczamy tym, którzy mieli świadomość istnienia pewnych praw i zależności czasem jeszcze zanim zostały one formalnie nazwane i ogłoszone.

Wszystkie znaczące budowle wznoszone od starożytności do połowy XX w. powstały bez użycia komputerów, metod komputerowych i specjalistycznego oprogramowania. A jednak stoją do dziś.

Zastosowanie pewnych, wybranych zasad mechaniki ma miejsce w trakcie naszego rozwoju. Chociaż nie potrafimy od razu wskazać z jakiej zasady lub zależności korzystamy, to intuicyjnie lub przez doświadczenie nam się to udaje - balansowanie ciałem, dostrojenie wartości siły do pożądanego efektu.

MECHANIKA

STATYKA

- układ sił znajduje się w równowadze
- czas jest nieistotny

KINEMATYKA

- układ ciał w ruchu
- nie uwzględnia się przyczyn ruchu
- czas jest istotny

DYNAMIKA

- STATYKA + KINETYKA

historycznie wydzielano jako odrębną gałąź

- uwzględnia ruch wraz z jego przyczyną
- czas jest kluczowy

Chociaż może okazać się na pierwszy rzut oka, że MECHANIKA nie ma już nic nowego do powiedzenia jako gałąź nauki rozwijana od kilkuset lat, to ostatnie doniesienia wskazują, że jeszcze sporo przed nami.

→ fale grawitacyjne

→ hipotetyczne, superciężkie cząstki i związane z nimi oddziaływania

→ MECHANIKA KWANTOWA

W celu ułatwienia lub nawet umożliwienia opisu przyszłych zagadnień wprowadzimy kilka pojęć i modeli.

- **DŁUGOŚĆ** - do opisu trzech wymiarów przestrzennych (chociaż w dużej mierze będziemy korzystać z opisów dwuwymiarowych), określenia przemieszczenia i położenia w wybranym układzie współrzędnych

- **CZAS** - czwarty wymiar, uzupełnia naturalny dla nas opis rzeczywistości, odnotowujemy jedynie jego przyrost; z punktu widzenia statyki nieistotny poza tym kluczowy

- **MASA** - miara ilości materii i związanej z nią bezwładności ciał; MASA ≠ CIĘŻAR

- **SIŁA** - miara oddziaływania między ciałami, niewidoczna chociaż obserwujemy efekty jej działania

- **PUNKT MATERIALNY** - punkt obdarzony masą, czyli nieskończenie mała cząsteczka, która skupia określoną masę

- **CIAŁO (BRYŁA) SZTYWNE** - układ punktów materialnych, dla którego niezależnie od przyjętego obciążenia relacje geometryczne między punktami pozostają stałe

- **SIŁA SKUPIONA** – siła, która działa w określonym punkcie konstrukcji; w rzeczywistości siła zawsze rozkłada się na jakimś obszarze

Wprowadzone pojęcia, jakkolwiek abstrakcyjne, potrafią:
- z dobrym przybliżeniem odwzorować rzeczywistość
- na poziomie inżynierskim zbudować odpowiedni model
- umożliwić analizę problemu

SIŁY

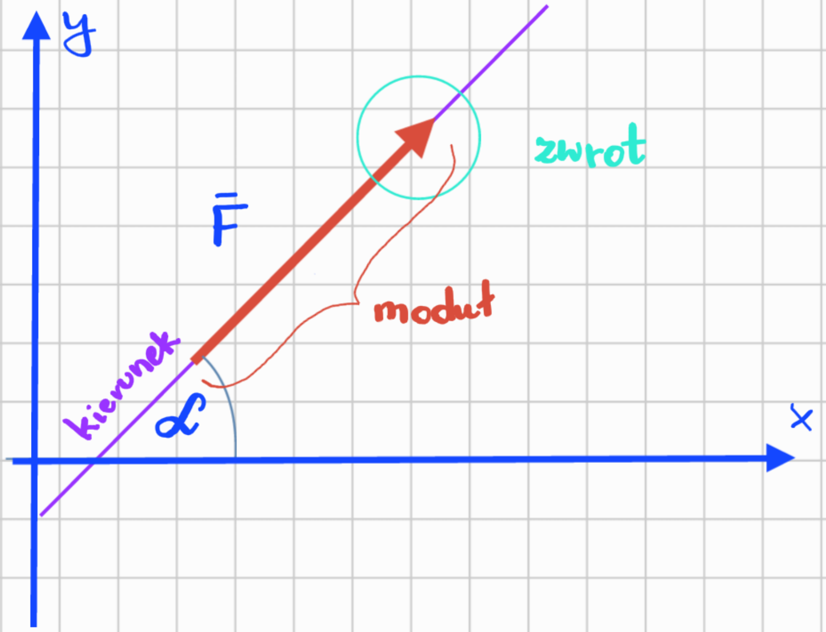
KONTAKTOWE
- bezpośredni kontakt rozpatrywanych ciał

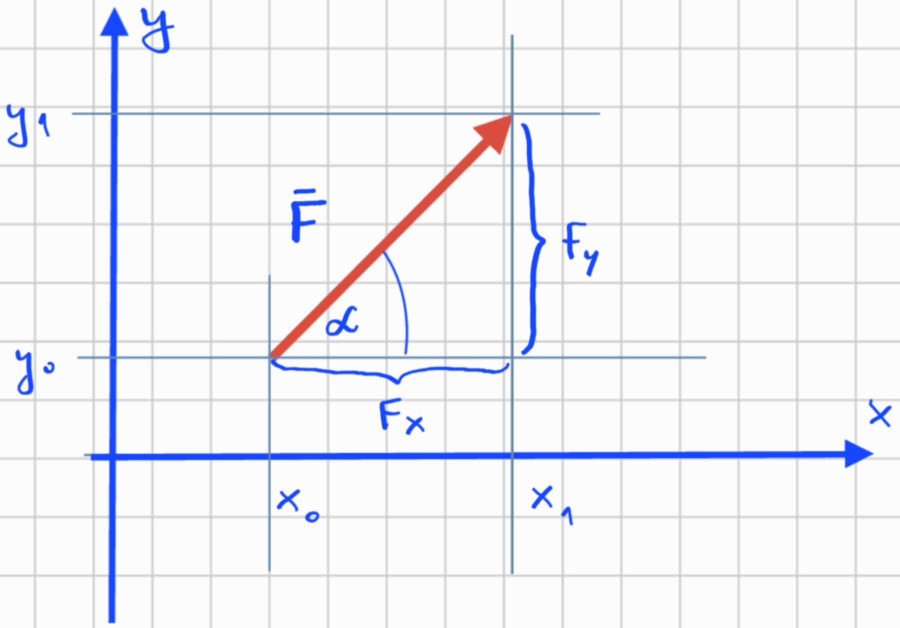
DZIAŁANIE PÓL ZEWNĘTRZNYCH
- właściwości przestrzeni
  - pole GRAWITACYJNE
  - pole ELEKTROMAGNETYCZNE
  - oddziaływanie SILNE
  - oddziaływania SŁABE

Siła to wielkość wektorowa, posiada:
- wartość (moduł)
- kierunek
- zwrot

Jednostką siły w układzie SI jest niuton (newton) – N

$$1\,N = \frac{1\,kg \cdot 1\,m}{1\,s^2}$$





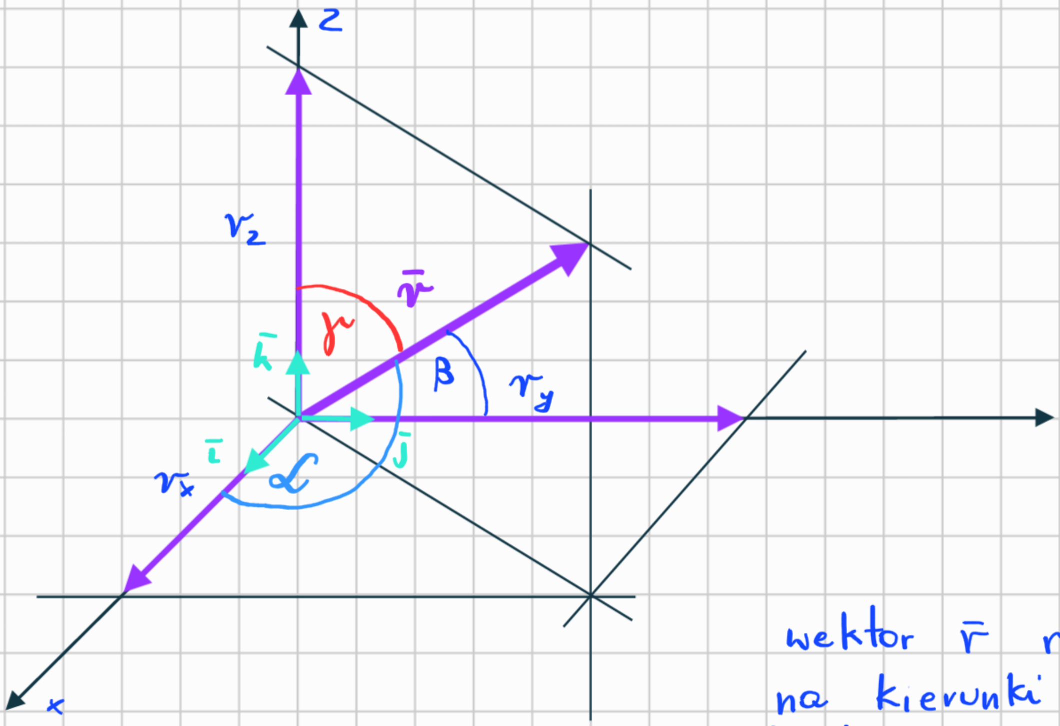
moduł wektora wyznaczymy z zależności:

$$|\bar{F}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

$$F_x = F \cos\alpha$$

$$F_y = F \sin\alpha$$

POSTAĆ ANALITYCZNA WEKTORA



wektor $\bar{r}$ rozłożony na kierunki w układzie kartezjańskim prawoskrętnym

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - wersory czyli wektory jednostkowe

$$\bar{r} = r_x \bar{i} + r_y \bar{j} + r_z \bar{k}$$

r_x, r_y, r_z – współrzędne wektora
wartości rzutu wektora
na wybrane kierunki

$$|r| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$ => moduł (długość) wektora

Kosinusy kątów α, β i γ określa się jako

tzw. COSINUSY KIERUNKOWE.

$$\frac{r_x}{r} = \cos\alpha \qquad \frac{r_y}{r} = \cos\beta \qquad \frac{r_z}{r} = \cos\gamma$$

Na kierunku wektora $\bar{r}$ tworzymy wersor $\bar{r}_0$

$$\bar{r}_0 = \frac{\bar{r}}{r}$$

$\bar{r}$ – wektor r

r – moduł wektora r

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

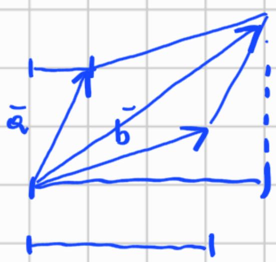
$$\bar{r}_0 = \frac{\bar{r}}{r} = \underbrace{\frac{r_x}{r}}_{\cos\alpha}\bar{i} + \underbrace{\frac{r_y}{r}}_{\cos\beta}\bar{j} + \underbrace{\frac{r_z}{r}}_{\cos\gamma}\bar{k}$$

$$\bar{r}_0 = \underbrace{\cos\alpha\,\bar{i}}_{\bar{r}_{0x}} + \underbrace{\cos\beta\,\bar{j}}_{\bar{r}_{0y}} + \underbrace{\cos\gamma\,\bar{k}}_{\bar{r}_{0z}}$$

POSTAĆ ANALITYCZNA WEKTORA – DZIAŁANIA

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$$

$$\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$$



DODAWANIE ANALITYCZNE

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) + (b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k})$$

$$= (a_x + b_x)\bar{i} + (a_y + b_y)\bar{j} + (a_z + b_z)\bar{k}$$

MNOŻENIE ANALITYCZNE

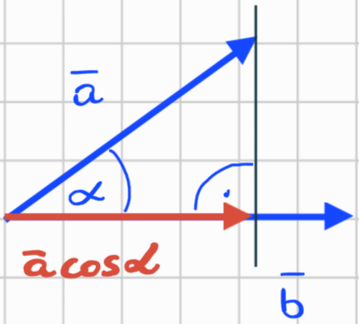
$\downarrow$ ILOCZYN SKALARNY

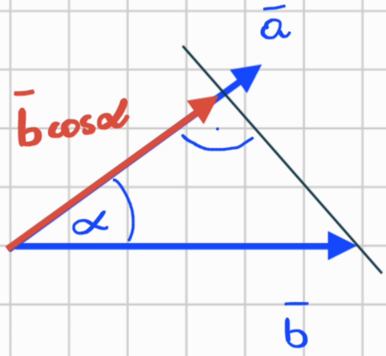
$\downarrow$ ILOCZYN WEKTOROWY

ILOCZYN SKALARNY

- w efekcie powstaje skalar (ma tylko wartość)

$$\bar{a} \circ \bar{b} = |a||b| \cos \sphericalangle (\bar{a}, \bar{b})$$





- iloczyn skalarny:
  - jest przemienny $\bar{a} \circ \bar{b} = \bar{b} \circ \bar{a}$
  - jest rozdzielny $(\bar{a} + \bar{b}) \circ \bar{c} = \bar{a} \circ \bar{c} + \bar{b} \circ \bar{c}$
  - jest łączny przy mnożeniu przez liczbę

$$m(\bar{a} \circ \bar{b}) = (m\bar{a}) \circ \bar{b} = \bar{a} \circ (m\bar{b})$$

$\bar{a} \perp \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \circ \bar{b} = 0$

$\bar{a} \parallel \bar{b} \Rightarrow ab$ dla wektorów o zgodnych zwrotach

$\Rightarrow -ab$ dla wektorów o przeciwnych zwrotach

Stąd wynika duże uproszczenie przy iloczynie skalarnym między wersorami:

$$\bar{i} \circ \bar{i} = \bar{j} \circ \bar{j} = \bar{k} \circ \bar{k} = 1$$

$$\bar{i} \circ \bar{j} = \bar{j} \circ \bar{k} = \bar{k} \circ \bar{i} = 0$$ (pamiętaj o przemienności)

$$\bar{a} \circ \bar{b} = (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \circ (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k})$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

iloczyny pozostałych par się zerują

ILOCZYN WEKTOROWY

- w efekcie powstaje wektor prostopadły do płaszczyzny tworzonej przez wektory biorące udział w operacji

$$\bar{a} \times \bar{b} = |a||b| \sin \sphericalangle (\bar{a}, \bar{b})$$

- zwrot powstałego wektora określa REGUŁA ŚRUBY PRAWOSKRĘTNEJ

$\bar{a} \times \bar{b}$ → nakręcamy wektor $\bar{a}$ na wektor $\bar{b}$ po mniejszym kącie

- powstały wektor jeśli jest **skierowany do nas** - rysujemy jako: $\odot$

skierowany od nas jako: $\otimes$

Iloczyn wektorowy: • NIE jest przemienny $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$

• rozdzielny względem dodawania

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$$

$$\bar{c} \times (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{c} \times \bar{a} + \bar{c} \times \bar{b}$$

• wymnaża się przez skalar

$$m(\bar{a} \times \bar{b}) = (m\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (m\bar{b})$$

$\bar{a} \perp \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \times \bar{b} = ab(\bar{a}^{\circ} \times \bar{b}^{\circ})$ $\sin 90^{\circ} = 1$

$\bar{a} \parallel \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \times \bar{b} = 0$

$\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \times \bar{b} = 0$

Mnożenie wektorowe wersorów

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0$$

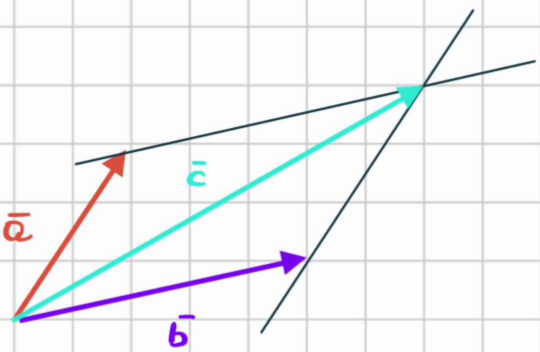
$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$ $\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$

$\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$ ale $\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$

$\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$ $\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$

AKSJOMATY STATYKI

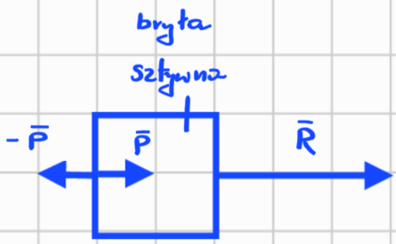
1. Dodawanie sił - zasada równoległoboku



2. Zasada równoważących się sił

Dwie siły przyłożone do ciała sztywnego tworzą układ tworzący w równowadze wtedy gdy - mają wspólną linię działania, te same moduły, ale przeciwne zwroty.

3. Zasada zerowego układu sił



1° działa tylko siła $\bar{R}$
2° dokładamy układ równoważący się
3° układ ten niczego nie zmienia

4. Zasada zesztywnienia

Jeśli pewne ciało podatne (odkształcalne) będące pod wpływem układu sił znajduje się w równowadze, to jeśli zamienimy to ciało na ciało sztywne, to równowaga będzie zachowana. Zasada ta nie działa w drugą stronę.

5. Zasada działania i przeciwdziałania /PRAWO AKCJI I REAKCJI/

6. Zasada oswobodzenia z więzów

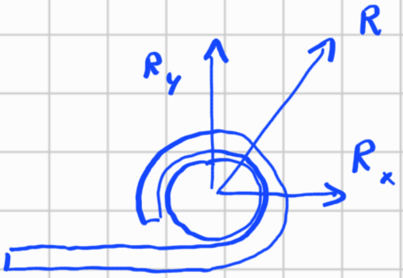
Ciało nieswobodne można myślowo oswobodzić z więzów (rzeczywistych warunków brzegowych: mocowanie, obciążenie) i zastąpić ich działanie siłami reakcji a następnie przeprowadzić analizę wpływu tych sił na oswobodzone ciało.

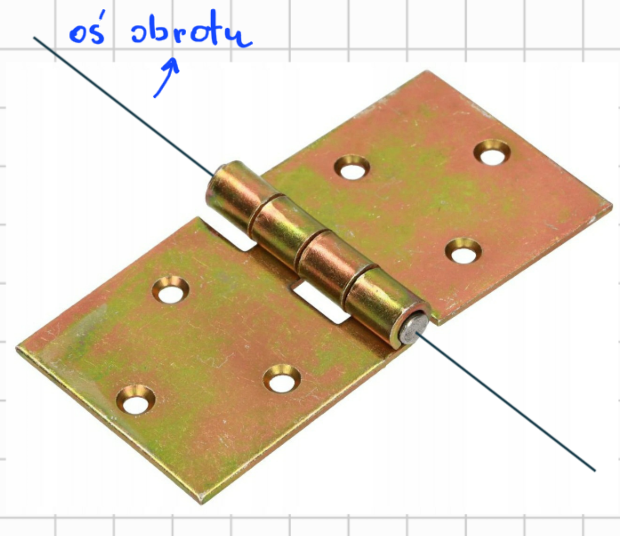
Stopień swobody - możliwość wykonania przez ciało niezależnego ruchu

- bryła sztywna: 6° swobody: $\underbrace{U_x, U_y, U_z}_{\text{translacja}}, \underbrace{R_x, R_y, R_z}_{\text{rotacja}}$
- punkt: 3° swobody: U_x, U_y, U_z

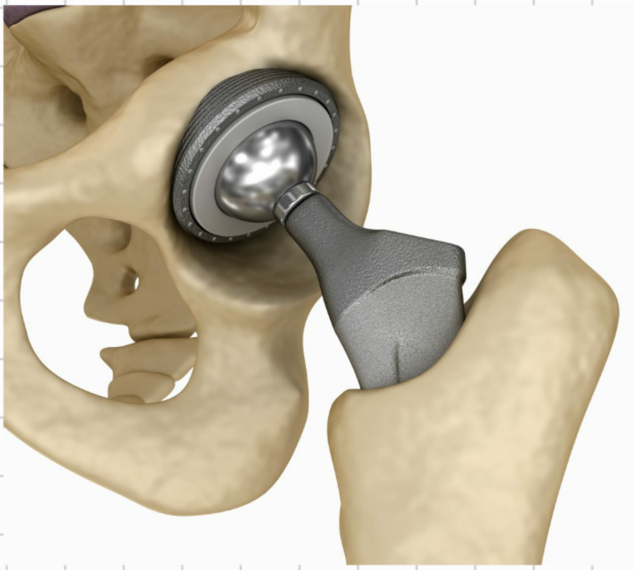
więzy

- przegub walcowy - dwa ramiona osadzone na trzpieniu z możliwością wzajemnego obrotu w jednej płaszczyźnie



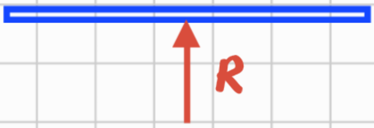


- przegub kulowy – możliwość obrotu w 3 osiach; w naszym organizmie to staw biodrowy

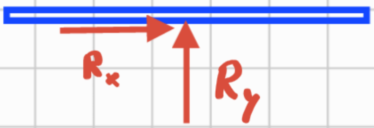


- podpora przegubowa przesuwna

uwolnienie z więzów

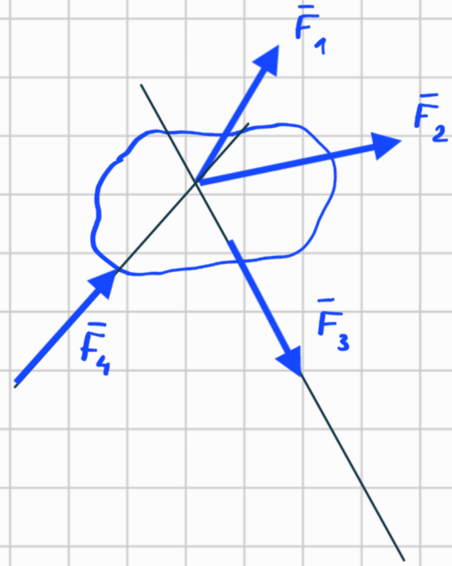


- podpora przegubowa stała

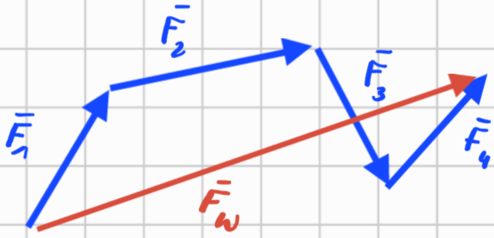


- wiotkie cięgna – pracują tylko na rozciąganie
- pręty nieważkie – pracują na ściskanie i rozciąganie

ZBIEŻNY UKŁAD SIŁ

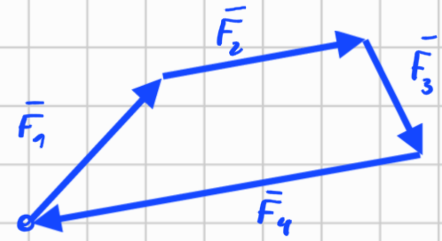


płaski układ sił zbieżnych



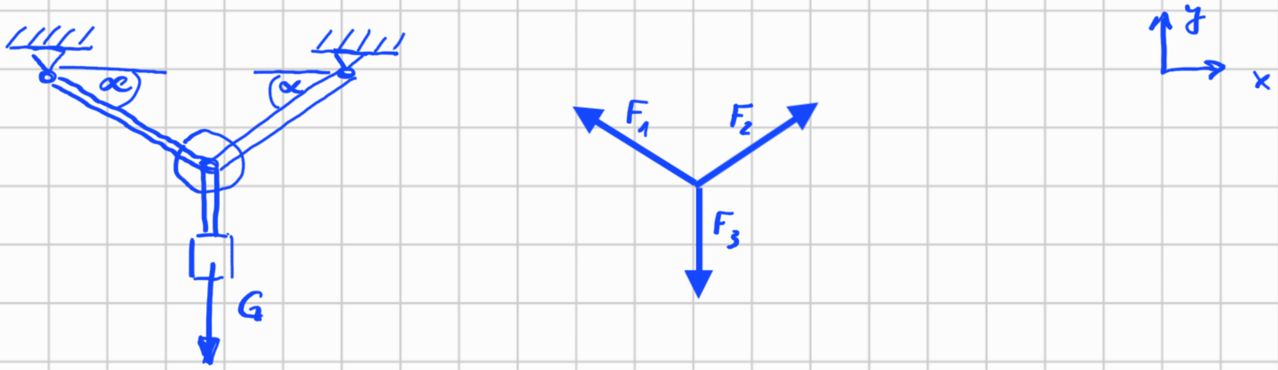
wielobok sił

RÓWNOWAGA ZBIEŻNEGO PŁASKIEGO UKŁADU SIŁ

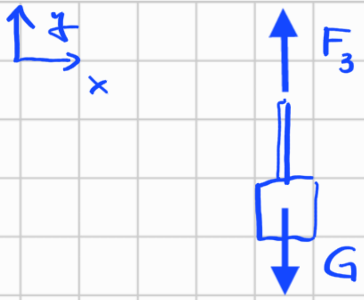


$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = 0$$

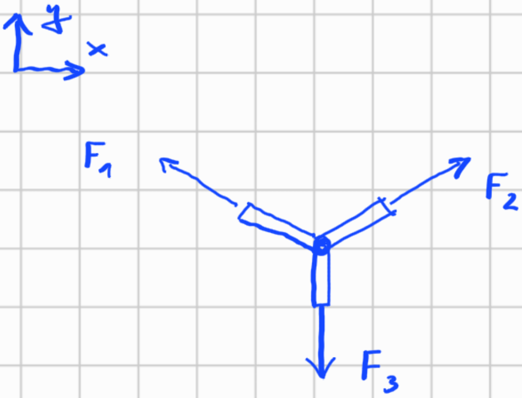
TWIERDZENIE O 3 SIŁACH NIERÓWNOLEGŁYCH



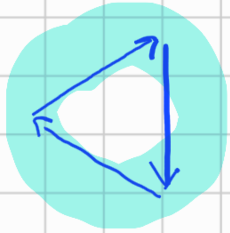
G, α

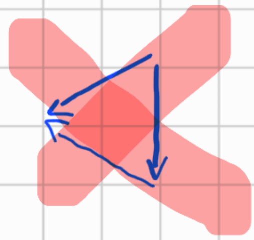


$$F_3 - G = 0$$



$$\begin{cases} F_{1y} + F_{2y} = F_3 \\ -F_{1x} + F_{2x} = 0 \end{cases}$$





Aby 3 siły nierównoległe, które działają na ciało sztywne były w równowadze, to linie działania tych sił muszą przecinać się w jednym punkcie, a same siły muszą tworzyć zamknięty wielobok (trójkąt) sił.

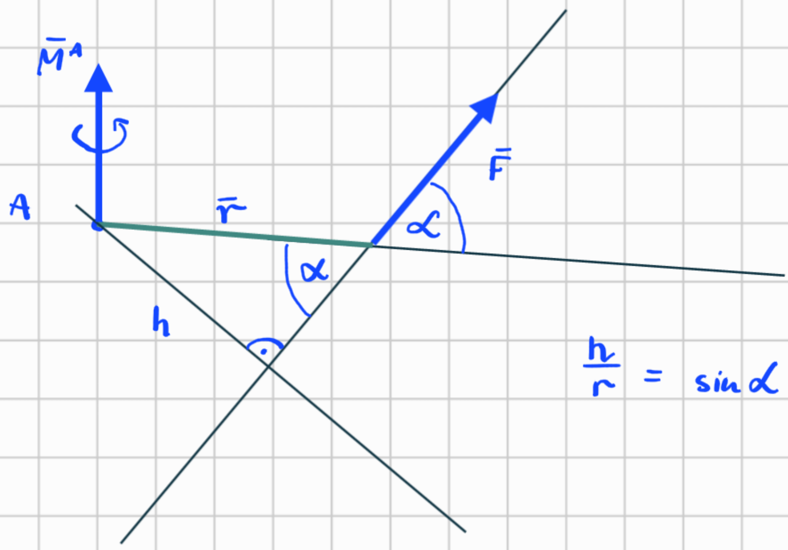
ANALITYCZNE WARUNKI RÓWNOWAGI UKŁADU ZBIEŻNEGO

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \end{cases}$$

suma rzutów sił na osie przyjętego układu współrzędnych było równe 0

siła A wynosi

MOMENT SIŁY WZGLĘDEM PUNKTU



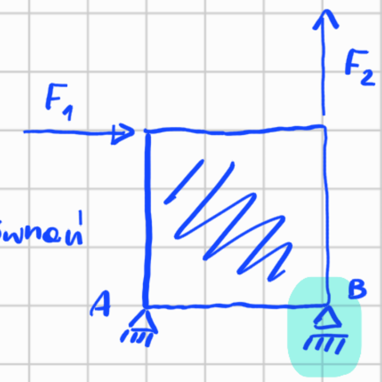
$\bar{r}$ - ramię siły

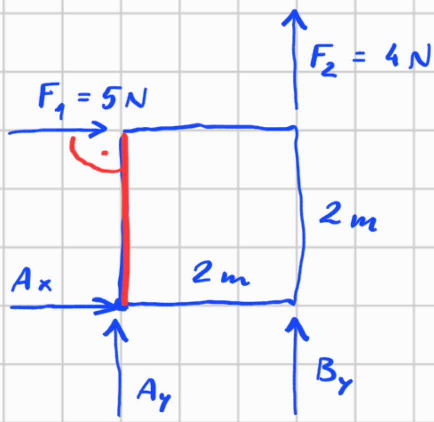
$$\frac{h}{r} = \sin\alpha \Rightarrow h = r\sin\alpha$$

$$\bar{M}^A = \bar{r} \times \bar{F} = |r||F| \sin\alpha = F \cdot h$$

wektor momentu siły jest prostopadły do powierzchni w której leżą wektory $\bar{r}$ i $\bar{F}$

liczba niewiadomych = liczba równań





A_x, A_y, B_y - nieznane reakcje

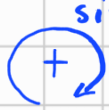
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \qquad F_1 + A_x = 0 \qquad A_x = -F_1$$

$$A_x = -5N$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \qquad A_y + B_y + F_2 = 0$$

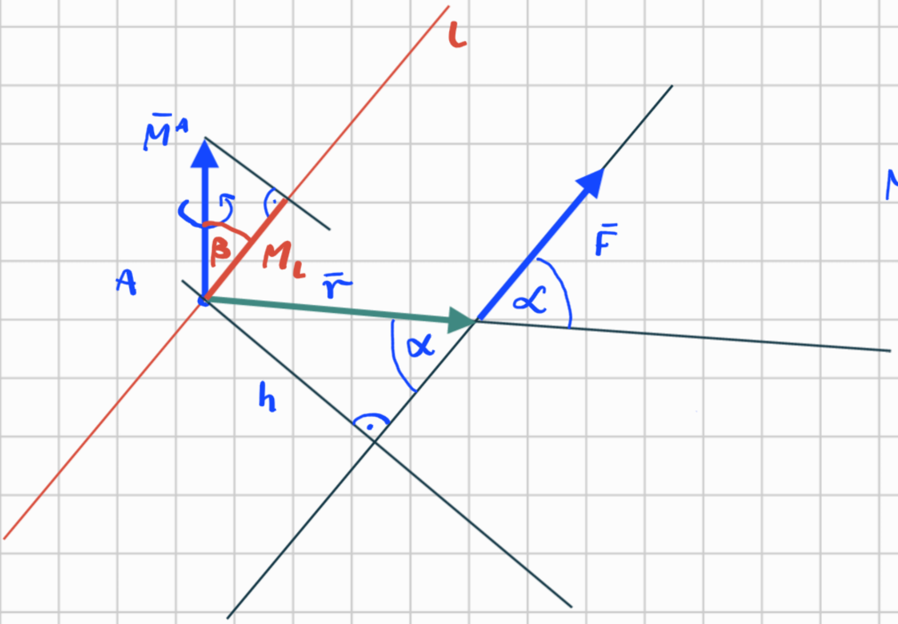
$$\sum_{i=1}^{n} M_i^A = 0$$

dodatni moment siły



MOMENT SIŁY WZGLĘDEM OSI

Momentem siły $\bar{F}$ względem osi L nazywamy rzut wektora momentu siły względem dowolnego punktu osi na tę oś.



$$M_L = M^A \cos\beta$$

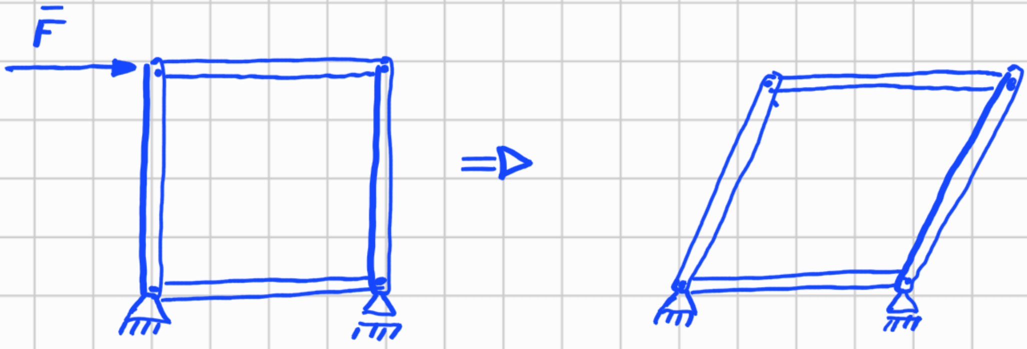
$$|M_L| = 0$$

- $\bar{r} = 0$
- $\bar{F} = 0$
- $\sin\alpha(\bar{r}, \bar{F}) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \lor \alpha = 180°$

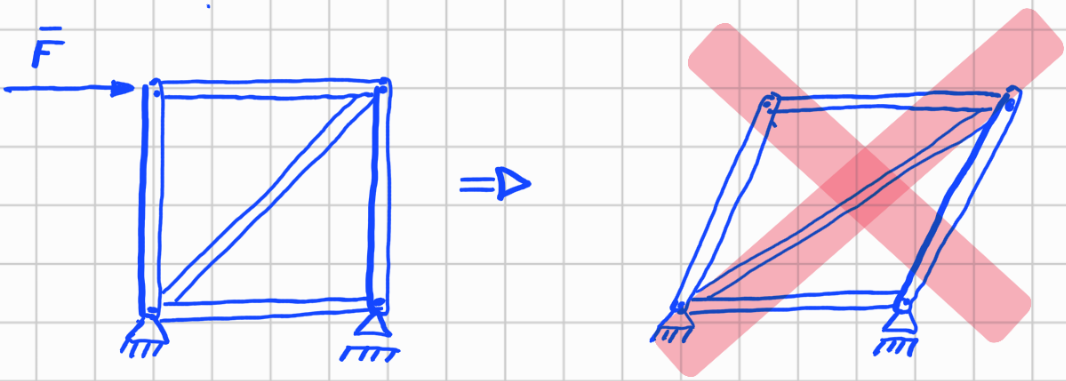
linie działania $\bar{r}$ i $\bar{F}$ pokrywają się

KRATOWNICE

- struktura zbudowana z prętów połączonych przegubowo



ryzyko powstania mechanizmu



dodatkowy pręt eliminuje ryzyko powstania mechanizmu

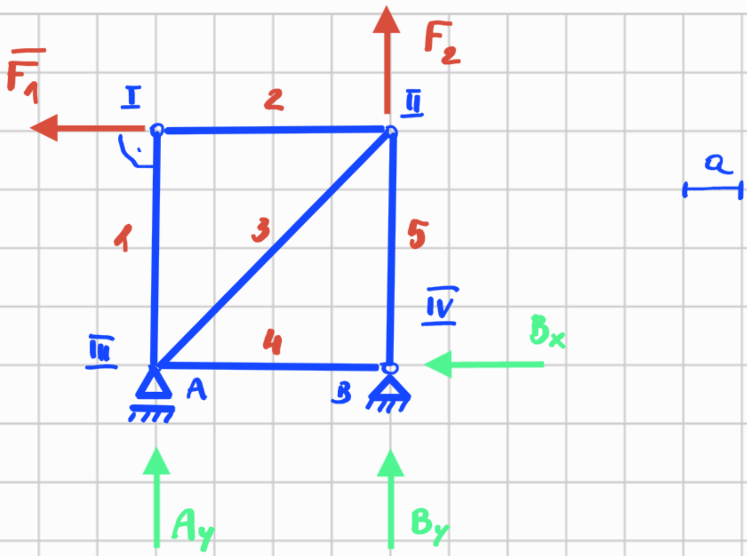
Kratownica zbudowana jest:

- z prostoliniowych, nieważkich prętów o dowolnym (nieistotnym) przekroju poprzecznym
- zachowuje się zgodnie z zasadą zesztywnienia - wymiary geometryczne są niezmienne
- siły działają zawsze w osi prętów
- siły do kratownicy przykładamy tylko w jej węzłach

Statyczna wyznaczalność kratownicy

p - liczba prętów kratownicy
w - liczba węzłów kratownicy
r - liczba nieznanych sił reakcji

$$p = 2w - r$$



$p = 2w - r$
$5 = 2 \cdot 4 - 3$

$F_1 = 10N$
$F_2 = 20N$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \qquad -F_1 - B_x = 0 \qquad B_x = -F_1 = -10N$

$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \qquad A_y + B_y + F_2 = 0$

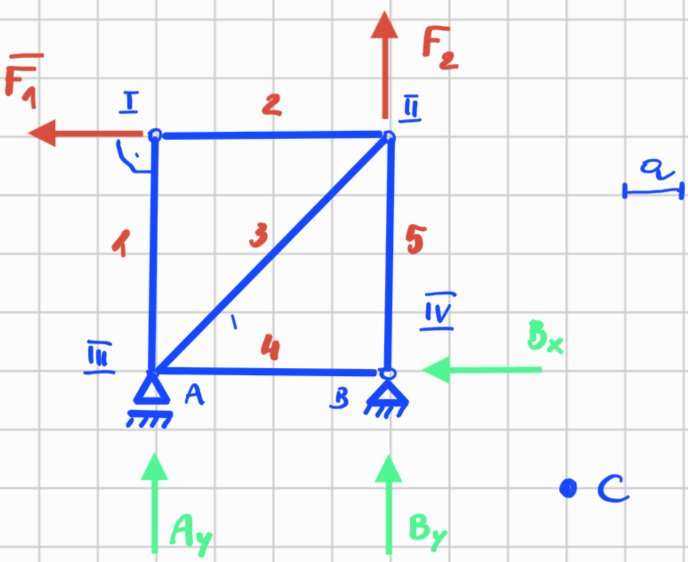
$\sum_{i=1}^{n} M^A = 0 \qquad -F_1 \cdot 4a - F_2 \cdot 4a - B_y \cdot 4a = 0 \quad / : a$

$$B_y = \frac{-4F_1 - 4F_2}{4} = -30N$$

$$A_y = -F_2 - B_y = -20 - (-30) = 10N$$

ZAWSZE, ALE TO ZAWSZE SPRAWDŹ REAKCJE

- przyjmujemy nowy biegun, najlepiej taki, który pozwoli uwzględnić wszystkie siły



Sprawdzenie reakcji eliminuje ryzyko propagowania błędu na obliczenia sił wewnętrznych w prętach

$$\Sigma M^c: \; A_y \cdot 7a + B_y \cdot 3a - B_x \cdot 2a + F_2 \cdot 3a - F_1 \cdot 6a = 0 \; / : a$$

$$70 - 90 + 20 + \cancel{60} - \cancel{60} = 0$$

Po wyznaczeniu i sprawdzeniu reakcji jesteśmy gotowi do wyznaczenia sił wewnętrznych w prętach.

METODY ANALITYCZNE WYZNACZANIA SIŁ W PRĘTACH KRATOWNIC PŁASKICH

- metoda wydzielania węzłów
- metoda Rittera

Metoda wydzielania węzłów polega na:

1) wydzielamy węzeł

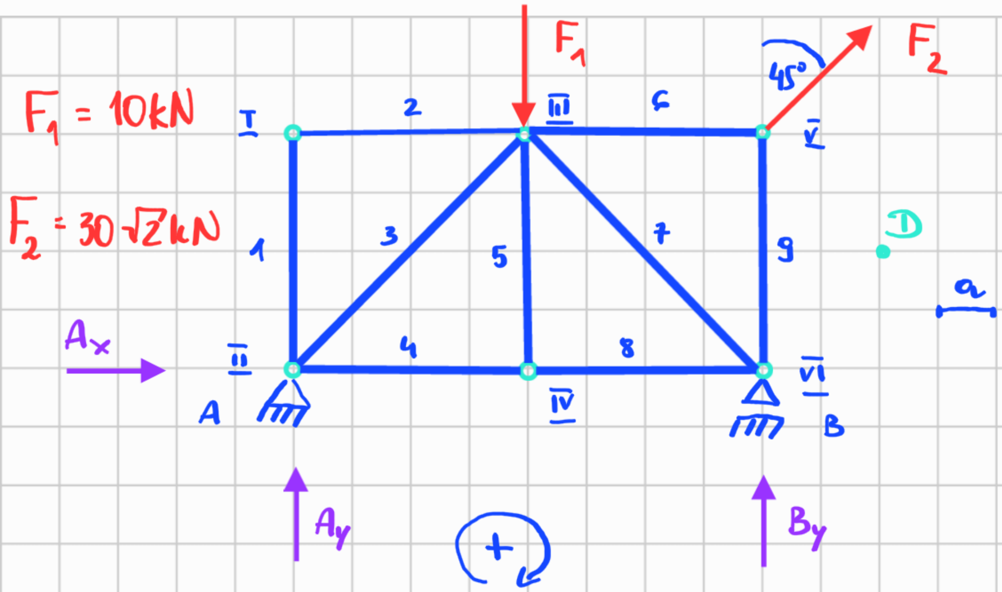
   - pręty, które dochodzą do tego węzła zastępujemy siłami – przyjmujemy, że siły wychodzą z węzła i jeśli tak przyjęta siła wyjdzie dodatnia to będzie to oznaczać, że symbolizowany przez nią pręt jest rozciągany, jeśli ujemna – ściskany

   - uwzględniamy inne siły związane z węzłem – obciążenie, reakcje

2) budujemy dwa równania równowagi z uwzględnieniem wszystkich sił związanych z wydzielonym węzłem

$F_1 = 10kN$

$F_2 = 30\sqrt{2}kN$



St. wyznaczalność

$9 = 2 \cdot 6 - 3$ ✓

$$\Sigma F_{ix}: \quad A_x + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad A_x = -30\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -30kN$$

$$\Sigma F_{iy}: \quad A_y - F_1 + B_y + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma M^B: \quad A_y \cdot 8a - F_1 \cdot 4a + F_2 \cdot 2\sqrt{2}a = 0 \quad / : a$$

$$A_y = \frac{4F_1 - 2\sqrt{2}F_2}{8} = \frac{40 - 120}{8} = -10 kN$$

$$B_y = F_1 - F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - A_y = -10 kN$$

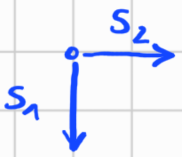
SPRAWDŹ REAKCJE

$$\Sigma M^D: \quad A_y \cdot 10a - A_x \cdot 2a + B_y \cdot 2a - F_1 \cdot 6a + F_2 2\sqrt{2}a = 0 \quad / : a$$

$$-100 + 60 - 20 - 60 + 120 = 0$$

L = P OK ✓

WĘZEŁ I

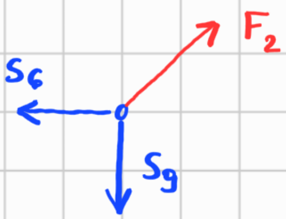


$$\Sigma F_x: \quad S_2 = 0$$

$$\Sigma F_y: \quad S_1 = 0$$

Pręt 2 i pręt 1 to PRĘTY ZEROWE.

WĘZEŁ V



$$\Sigma F_x: \quad F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_6 = 0$$

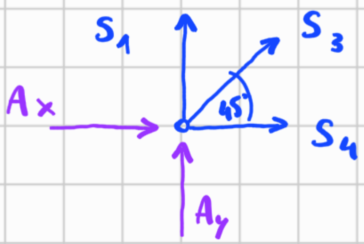
$$S_6 = 30\,kN$$

$$\Sigma F_y: \quad F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_9 = 0$$

$$S_9 = 30\,kN$$

Pręt 6 i pręt 9 są rozciągane.

WĘZEŁ II



$$\Sigma F_{ix}: \quad S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_4 + A_x = 0$$

$$\Sigma F_{iy}: \quad S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + A_y + \underset{0}{\underset{\parallel}{S_1}} = 0$$

$$S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = -A_y = 10\,kN$$

$$S_3 = 10\sqrt{2}\,kN$$

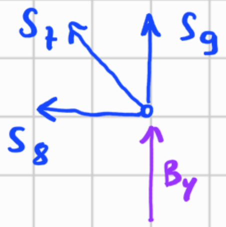
$$10 + S_4 - 30 = 0 \Rightarrow S_4 = 20\,kN$$

WĘZEŁ IV

$S_4 = S_8 = 20 kN$

Pręt 5 to pręt zerowy.

WĘZEŁ VI



$$-S_7 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_8 = 0$$

$$S_7 = -S_8\sqrt{2} = -20\sqrt{2}\ kN$$

PRĘTY ZEROWE

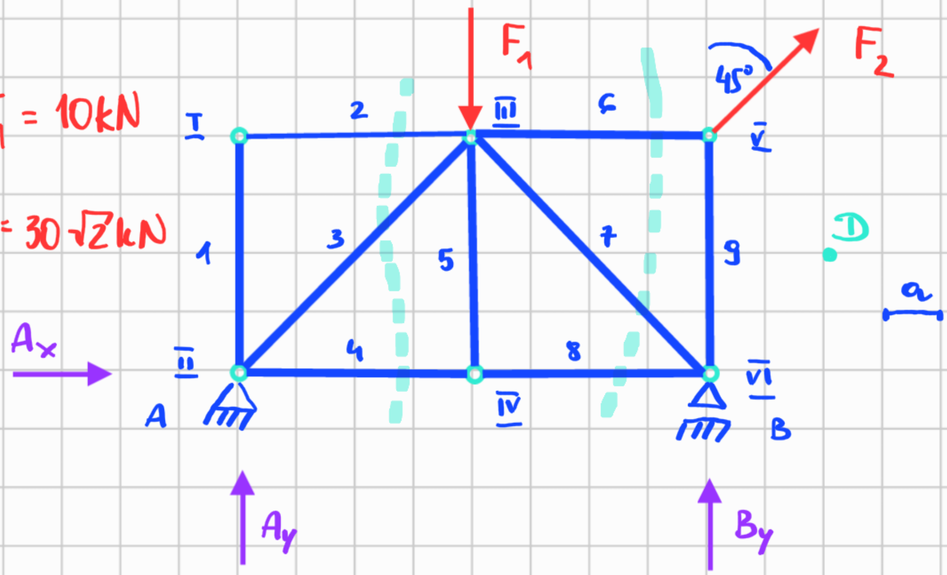
- jeżeli na węzeł nie działa żadna siła a wychodzą z niego dwa pręty to są to pręty zerowe
- jeżeli na węzeł nie działa żadna siła a wychodzą z niego trzy pręty z czego dwa leżą na jednej linii działania, to trzeci z tych prętów jest zerowy
- jeżeli na węzeł, z którego wychodzą dwa pręty, działa siła, której linia działania pokrywa się z jednym z prętów to drugi z tych prętów jest zerowy

METODA RITTERA (metoda przecięć)

- tniemy ZAWSZE przez 3 pręty, tak by kratownice rozpadła się na 2 części
  - → przecinane pręty nie mogą wychodzić jednocześnie z jednego węzła
  - → przecinane pręty nie mogą być wzajemnie równoległe
- analizujemy wybraną część kratownicy i liczymy TYLKO W PRZECIĘTYCH PRĘTACH.

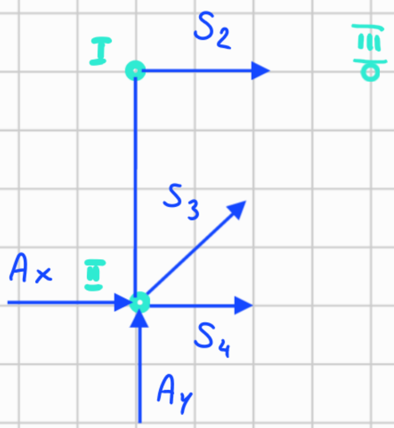
$F_1 = 10\,kN$

$F_2 = 30\sqrt{2}\,kN$



- dozwolone cięcie kratownicy

Wybraliśmy jedną część przekroju:
- szukamy tzw. biegunów Rittera, względem których liczymy sumę momentów sił



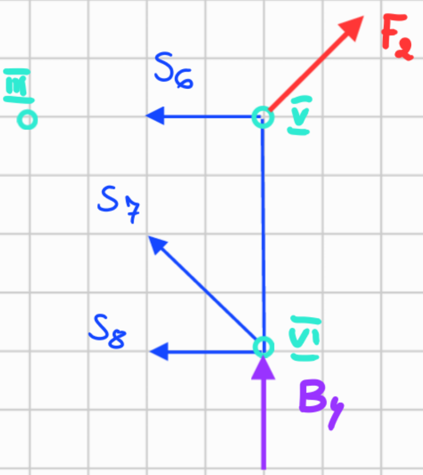
$$\Sigma M^{II}: \quad S_2 \cdot 4a = 0$$
$$S_2 = 0$$

$$\Sigma F_y: \quad S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + A_y = 0$$

$$S_3 = -A_y\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\,kN$$

$$\Sigma M^{III}: \quad -S_4 \cdot 4a + A_y \cdot 4a - A_x \cdot 4a = 0$$

$$S_4 = A_y - A_x = -10 + 30 = 20\,kN$$



$$\Sigma M^{III}: \quad S_8 \cdot 4a - B_y \cdot 4a - F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4a = 0 \;/ :a$$

$$S_8 = \frac{4B_y + 2\sqrt{2}F_2}{4} = \frac{-40 + 120}{4} = 20\,kN$$

$$\Sigma M^{VI}: \quad -S_6 \cdot 4a + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4a = 0 \;/ :4a$$

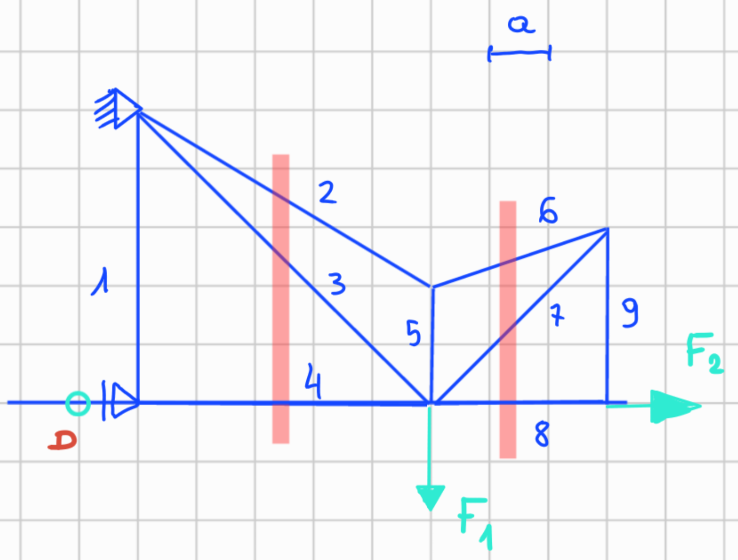
$$S_6 = F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 30\,kN$$

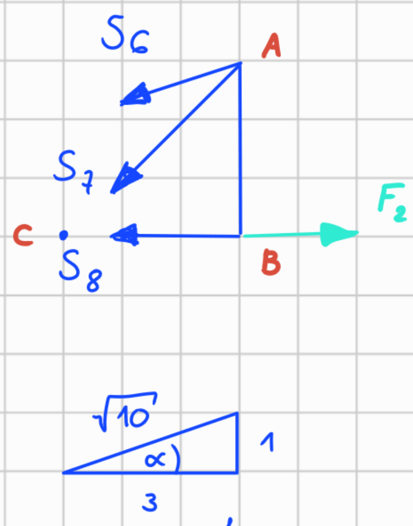
$$\Sigma F_y: \quad B_y + S_7 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S_7 = -B_y \frac{2}{\sqrt{2}} - F_2 = 10\sqrt{2} - 30\sqrt{2} = -20\sqrt{2} \text{ kN}$$

Wybór części kratownicy winniśmy przeprowadzić w oparciu o założenie - minimum nakładów, maksimum efektu.
Wybieramy tę część, gdzie:
- jest mniej sił do uwzględnienie
- mimo większej liczby sił łatwiej przeprowadzić obliczenie (np. nie ma sił pod egzotycznymi kątami)

Możliwa jest sytuacja, gdzie kratownicę przekroić da się w taki sposób aby wybrana przez nas część nie zawierała w ogóle sił reakcji - nie będzie potrzeby ich wyznaczania.





$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\Sigma M^A: \quad S_8 \cdot 3a - F_2 \cdot 3a = 0$$

$$S_8 = F_2$$

$$\Sigma M^C: \quad \underbrace{-S_6 \frac{3}{\sqrt{10}}}_{S_{6x}} \cdot 3a + \underbrace{S_6 \frac{1}{\sqrt{10}}}_{S_{6y}} \cdot 3a = 0$$

$$\Sigma M^D: \quad S_7 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 9a - S_7 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3a = 0$$

$$S_7 \frac{\sqrt{2}}{2} 6 = 0$$

$$S_7 = 0$$

BELKI

belka – pręt o przekroju pryzmatycznym, który obciążony jest siłami poprzecznymi.

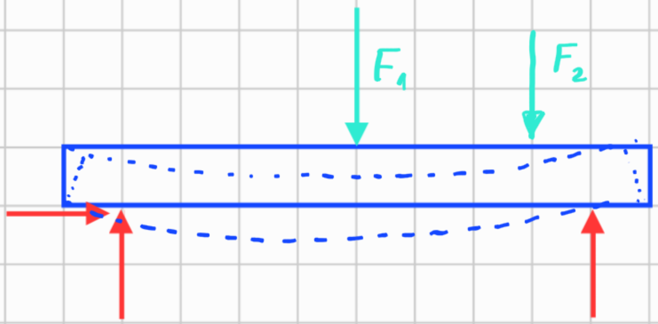
- przyjmujemy nieważkość ustroju
- niezmienność geometryczna

belka swobodnie podparta

Statyczna wyznaczalność belki

$3n - r = 0$ — n - liczba belek, r - liczba reakcji

SIŁY WEWNĘTRZNE W BELCE



- siła normalna – siła o przebiegu zgodnym z osią belki, N
- siła tnąca – siła o przebiegu prostopadłym do osi belki, T
- moment gnący – leży w płaszczyźnie prostopadłej względem działających obciążeń, M_g

Aby wyznaczyć siły wewnętrzne w belce należy podzielić ją na tzw. PRZEDZIAŁY, czyli fragmenty belki, w obrębie których moment gnący da się opisać za pomocą jednego równania

Granice przedziałów:

- krańce belki (początek i koniec)
- punkt przyłożenia obciążenia skupionego (siła skupiona, moment skupiony)
- krańce obciążenia ciągłego (początek i koniec)

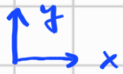
Przegub w belce

- nie ma potrzeby tworzenia granicy przedziału w tym miejscu, ale można sprawdzić czy moment gnący w tym miejscu jest równy 0 (zero)
- dokładając przegub do belki trzeba również dodać podporę przesuwną

Twierdzenie Szwedlera

- określa związek jaki zachodzi między obciążeniami zewnętrznymi a wynikającymi z nich siłami wewnętrznymi

I Twierdzenie Szwedlera



Pochodna z wartości momentu gnącego wzdłuż osi belki równa jest sile tnącej

$$T = \frac{d M_g}{dx}$$

II Twierdzenie Szwedlera

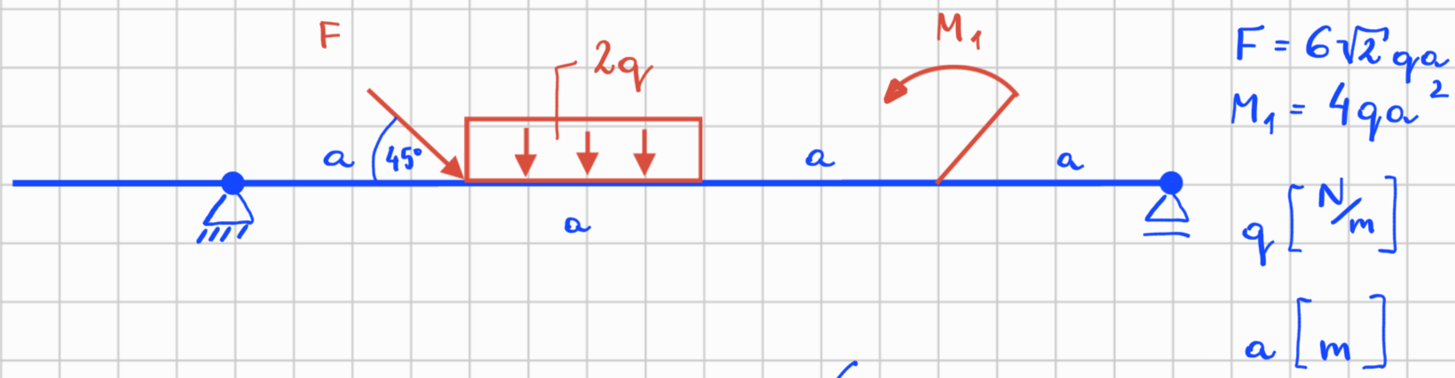
Pochodna siły tnącej wzdłuż osi belki równa jest obciążeniu ciągłemu ze znakiem przeciwnym.

$$-q(x) = \frac{dT}{dx}$$

Konwencje znaków

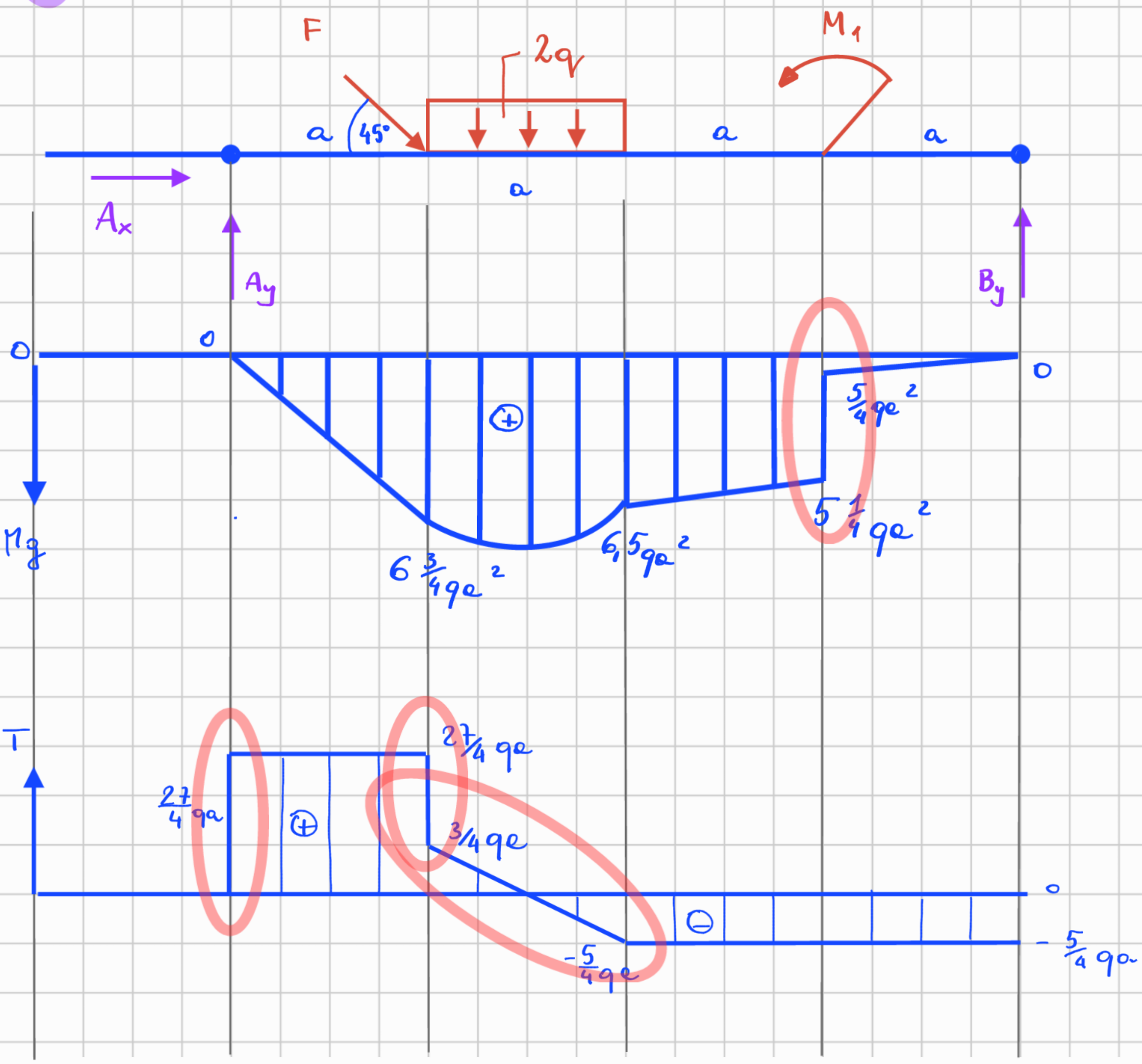
- siła tnąca, T

- moment gnący



1. Sprawdzić wyznaczalność belki ✓
2. Oswobodzić z więzów i wprowadzić reakcje
3. Podzielić belkę na przedziały
4. Wyznaczyć równania na Mg, T, N i sprawdzić wartości w granicach przedziałów
5. Naszkicować wykresy Mg, T i N

C



$$\Sigma F_x: \quad A_x + F_x = 0 \qquad A_x = -F\frac{\sqrt{2}}{2} = -6qa$$

$$\Sigma F_y: \quad A_y + B_y - F_y - \underbrace{2qa} = 0$$

obciążenie zastępcze za obciążenie ciągłe o wartości 2q działające na odcinku o długości a, wektor obciążenie zastępczego prostokątnego jest zorientowany na środku odcinka

$$\Sigma M^A: \quad F_y \cdot a + 2qa \cdot 1{,}5a - M_1 - B_y \cdot 4a = 0 \quad / : a$$

$$6qa + 3qa - 4qa = 4B_y$$

$$B_y = \frac{5}{4}qa$$

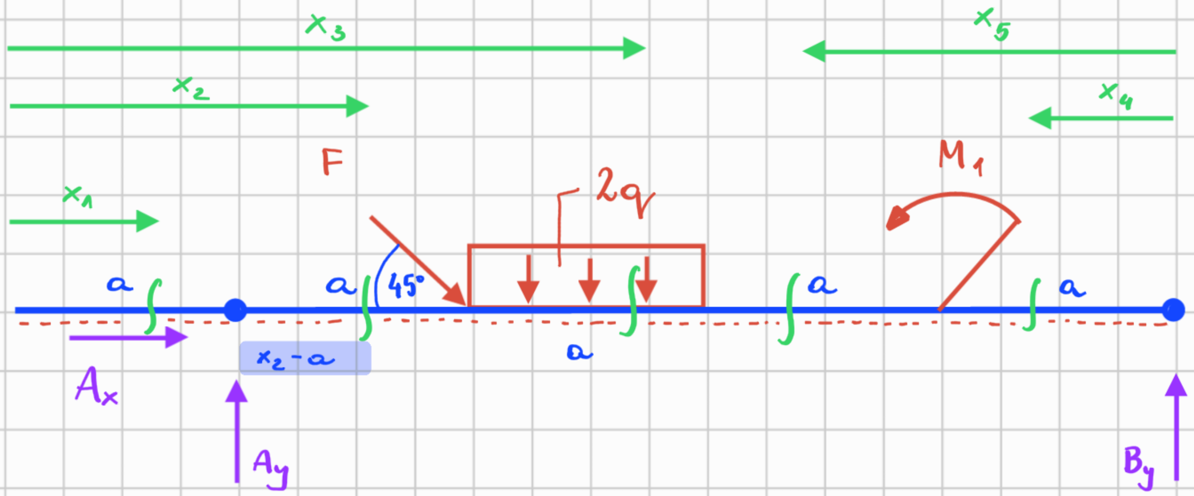
$$A_y = 2qa + 6qa - \frac{5}{4}qa$$

$$A_y = 6\tfrac{3}{4}qa = \frac{27}{4}qa$$

$$\Sigma M^C: -A_x \cdot a - A_y \cdot a + F\frac{a\sqrt{2}}{2} + 2qa \cdot 2{,}5a - M_1 - B_y \cdot 5a = 0 \quad / : a$$

$$6qa - \frac{27}{4}qa + 6qa + 5qa - 4qa - \frac{25}{4}qa = 0$$

$$17qa - 17qa = 0 \quad \checkmark$$



Przedział I

$Mg^{I}: \; 0$ nie ma żadnych sił poprzecznych, momentów skupionych etc.

$T^{I}: \; 0$

Przedział II

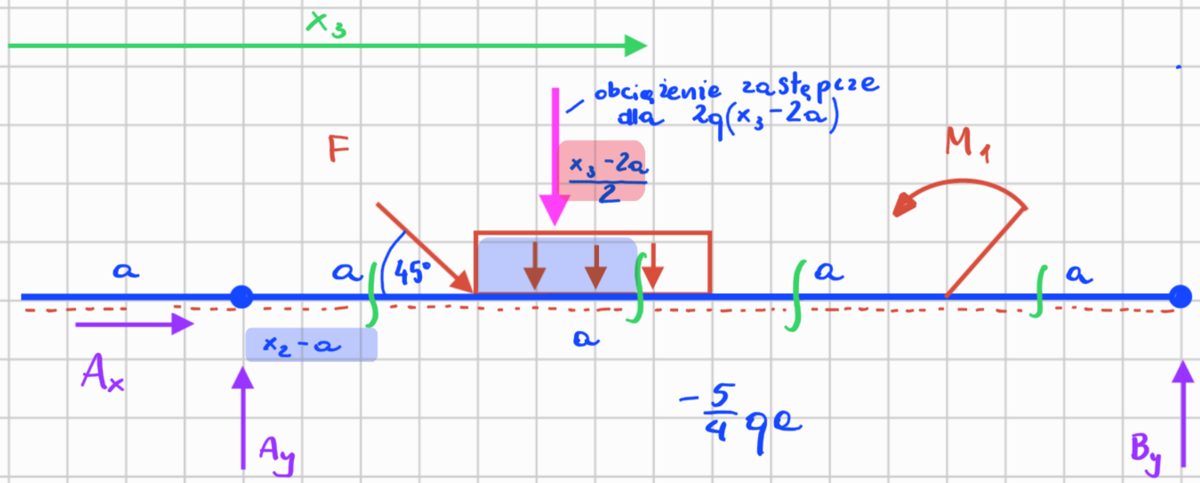
$Mg^{II}: \; A_y(x_2 - a)$

$T^{II}: \; A_y = \frac{27}{4}qa$

$Mg^{II}(x_2 = a) = A_y(a-a) = 0$

$Mg^{II}(x_2 = 2a) = A_y(2a-a) = A_y a = \frac{27}{4}qa^2$

Przedział III



$$Mg^{III}: \; A_y(x_3 - a) - F_y(x_3 - 2a) - \underbrace{2q(x_3-2a)}_{\text{to jest siła}}\underbrace{\left(\frac{x_3-2a}{2}\right)}_{\text{ramię}}$$

$$Mg^{III}: \; A_y(x_3 - a) - F_y(x_3 - 2a) - q(x_3-2a)^2$$

$$T^{III}: \; A_y - F_y - 2q(x_3 - 2a)$$

$$Mg^{III}(x_3 = 2a) = \frac{27}{4}qa^2$$

$$Mg^{III}(x_3 = 3a) = \frac{27}{2}qa^2 - 6qa^2 - qa^2 = 6,5\,qa^2$$

$T^{III}(x_3 = 2a) = \frac{27}{4}qa - 6qa = \frac{3}{4}qa$

$T^{III}(x_3 = 3a) = \frac{27}{4}qa - 6qa - 2qa = -\frac{5}{4}qa$

Przedział $\overline{IV}$

$Mg^{IV} = B_y \cdot x_4$

$T^{IV} = -B_y = -\frac{5}{4}qa$

od prawej strony, zmień znak pochodnej na przeciwny

$Mg^{IV}(x_4 = a) = \frac{5}{4}qa^2$

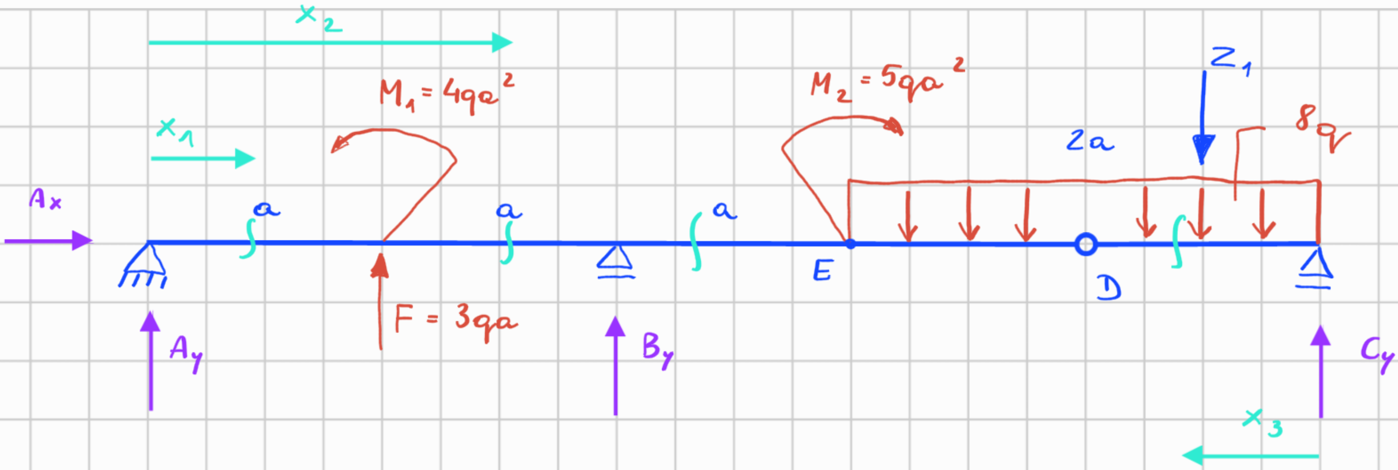
Przedział $\overline{V}$

$Mg^{\overline{V}}: B_y \cdot x_5 + M_1$

$T^{\overline{V}}: -B_y = -\frac{5}{4}qa$

$Mg^{\overline{V}}(x_5 = a) = \frac{5}{4}qa^2 + 4qa^2 = 5\frac{1}{4}qa^2$

$Mg^{\overline{V}}(x_5 = 2a) = \frac{5}{2}qa^2 + 4qa^2 = 6,5qa^2$



(1) $\Sigma F_x = A_x = 0$

(2) $\Sigma F_y = A_y + B_y + F + C_y - \underline{8q} \cdot \underline{2a} = 0$

(3) $\Sigma M^A = -M_1 - F \cdot a - B_y \cdot 2a + M_2 + \underbrace{8q \cdot 2a}_{\text{siła}} \cdot \underbrace{4a}_{\text{ramię}} - C_y \cdot 5a = 0$

suma momentów sił względem przegubu po prawej jego stronie

(4) $\Sigma M^{Dp} = -C_y \cdot a + \underbrace{8q \cdot a}_{Z_1} \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad /:a$

(5) $\Sigma M^{DL} = A_y \cdot 4a + F \cdot 3a - M_1 + B_y \cdot 2a + M_2 - 8q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad /:a$

ad. (4) $C_y = 4qa$

$F = 3$
$M_1 = 4$
$M_2 = 5$

ad. (5)
$$4A_y + 3F - \frac{M_1}{a} + 2B_y + \frac{M_2}{a} - 4qa = 0$$
$$4A_y + 2B_y = -9qa + 4qa - 5qa + 4qa$$
$$4A_y + 2B_y = -6qa$$
$$2A_y + B_y = -3qa$$

ad. (3) $-M_1 - F \cdot a - B_y \cdot 2a + M_2 + \underbrace{8q \cdot 2a}_{} \cdot \underbrace{4a}_{} - C_y \cdot 5a = 0 \quad /:a$

$$-4qa - 3qa + 5qa + 64qa - 20qa = 2B_y$$
$$B_y = 21qa$$

ad. (4) $2A_y = -3qa - 21qa$
$$A_y = -12qa$$

ad (2) $A_y + B_y + F + C_y - \underline{8q} \cdot \underline{2a} = 0$

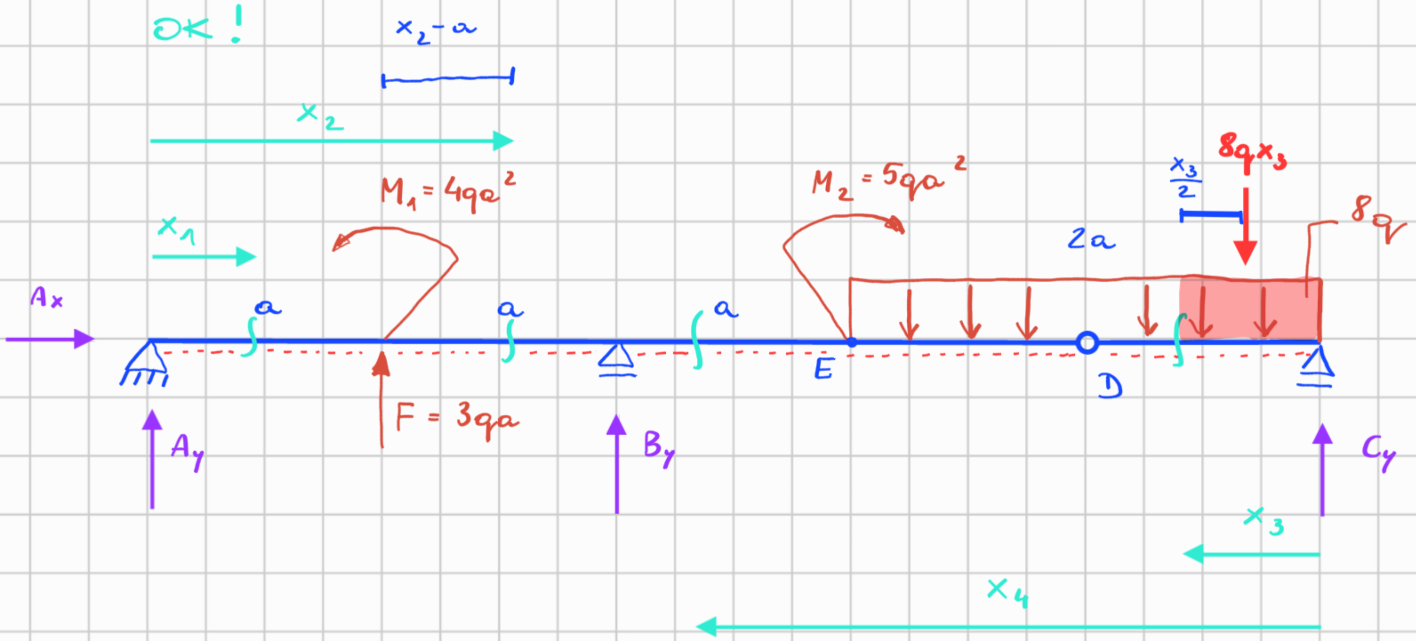
$-12qa + 21qa + 3qa + 4qa - 16qa = 0$

ok!

$\Sigma M^E: A_y \cdot 3a + F \cdot 2a + B_y \cdot a - C_y \cdot 2a - M_1 + M_2 + 8q \cdot 2a \cdot a = 0$

$-36qa^2 + 6qa^2 + 21qa^2 - 8qa^2 - 4qa^2 + 5qa^2 + 16qa^2 = 0$

ok!



Przedział I

$Mg^{I}: A_y \cdot x_1$ $\quad Mg^{I}(x_1 = 0) = 0$ $\quad Mg^{I}(x = a) = -12qa^2$

$T^{I}: A_y = -12qa$

Przedział II

$Mg^{II}: A_y \cdot x_2 + F(x_2 - a) - M_1$

$T^{II}: A_y + F = -12qa + 3qa = -9qa$

$Mg^{II}(x_2 = a) = -12qa^2 - 4qa^2 = -16qa^2$

$Mg^{II}(x_2 = 2a) = -24qa^2 + 3qa^2 - 4qa^2 = -25qa^2$

Przedział $\overline{\underline{III}}$ (od prawej)

$$Mg^{III}: \quad C_y \cdot x_3 - \underbrace{8qx_3}_{\text{siła}} \underbrace{\frac{x_3}{2}}_{\text{ramię}} = C_y x_3 - 4qx_3^2$$

$$T^{III}: \quad -C_y + 8qx_3$$

$$Mg^{III}(x_3 = 0) = 0$$

$$Mg^{III}(x_3 = 2a) = 8qa^2 - 16qa^2 = -8qa^2$$

$$T^{III}(x_3 = 0) = -C_y = -4qa$$

$$T^{III}(x_3 = 2a) = -4qa + 16qa = 12qa$$

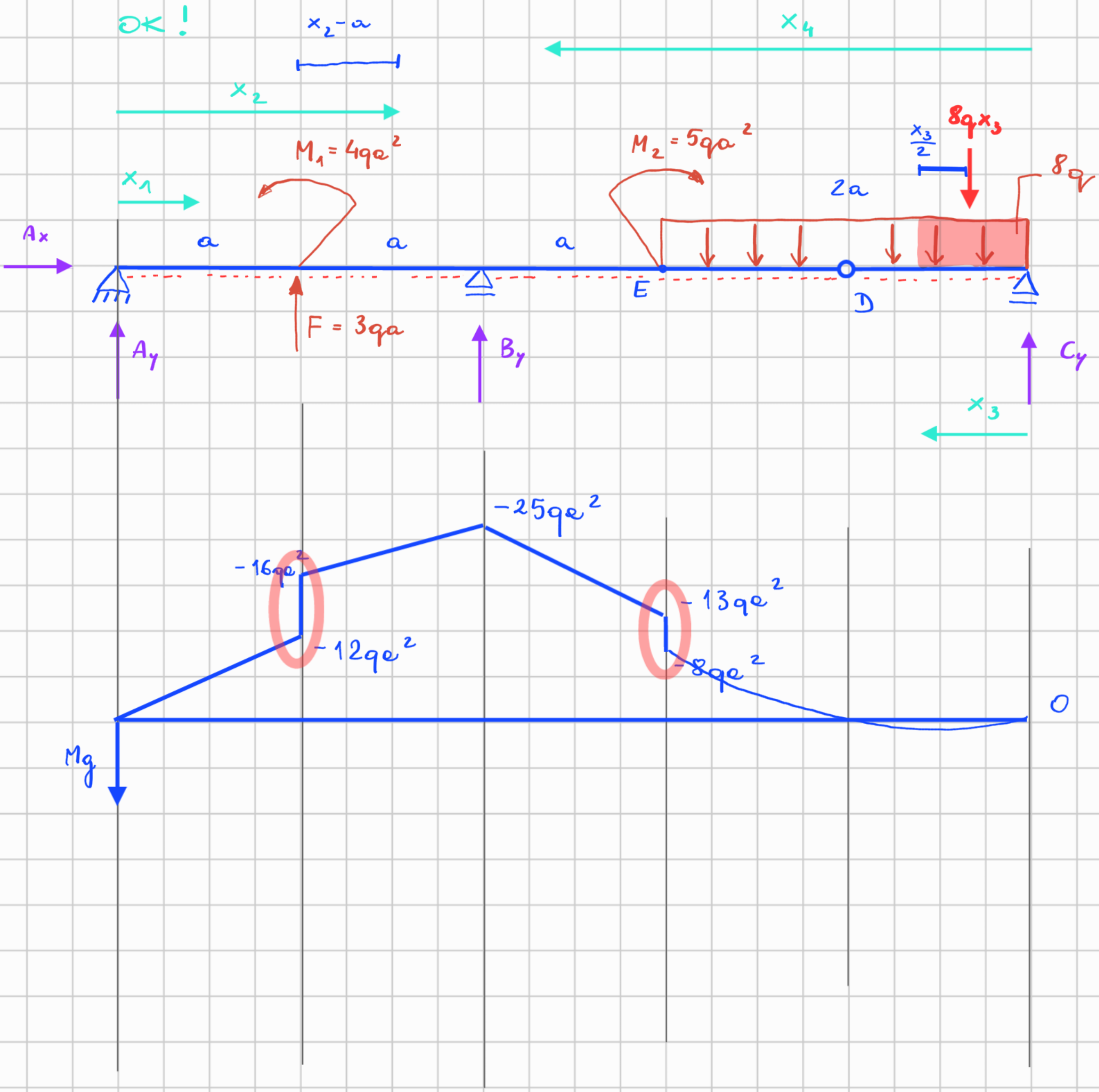
Przedział $\overline{\underline{IV}}$

$$Mg^{IV}: \quad C_y \cdot x_4 - 8q \cdot 2a \cdot (x_4 - a) - M_2$$

$$T^{IV}: \quad -C_y + 16qa = 12qa$$

$$Mg^{IV}(x_4 = 2a) = 8qa^2 - 16qa^2 - 5qa^2 = -13qa^2$$

$$Mg(x_4 = 3a) = 12qa^2 - 32qa^2 - 5qa^2 = -25qa^2$$


OK !
x2 - a
x4
x2
8qx3
x3/2
M1 = 4qa²
M2 = 5qa²
8q
2a
x1
Ax
a
a
a
E
D
F = 3qa
Ay
By
Cy
x3
-25qa²
-16qa²
-13qa²
-12qa²
-8qa²
0
Mg