MOMENTY BEZWŁADNOŚCI

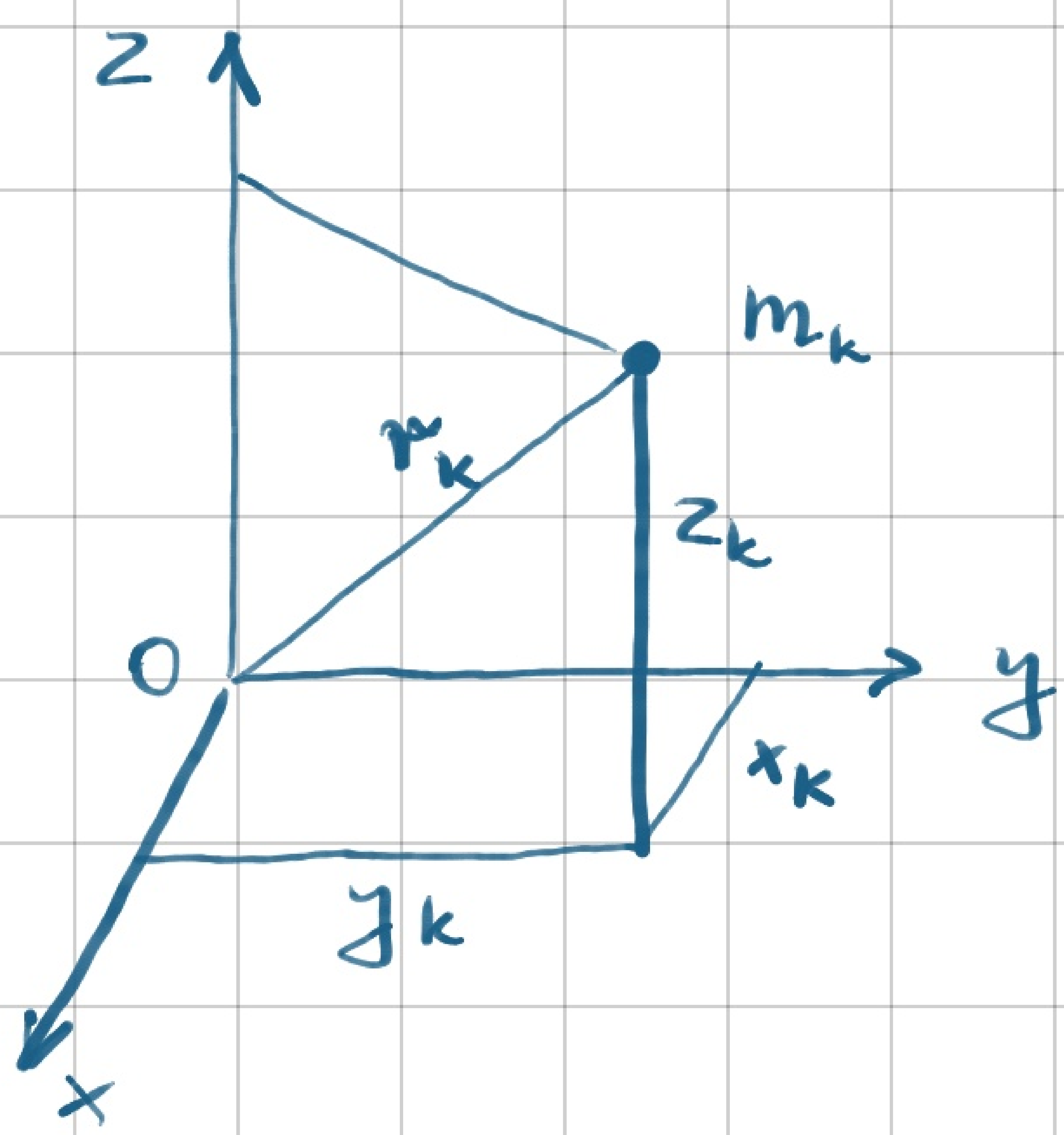
- **bezwładność** - cecha ciał obdarzonych masą, które mówi o tym czy łatwo zmienić stan ruchu ciała; jest proporcjonalne do masy

Innymi słowy im większą masę posiada obiekt tym łatwiej wprawić go w ruch lub zatrzymać z tego ruchu.
To wyjaśnia dlaczego potężne kontenerowce potrzebują już na kilka kilometrów przed portem precyzyjnie określić sposób wejścia do portu.
Tak olbrzymie masa nie może zostać szybko zatrzymana.

- **moment bezwładności** - miara bezwładności w ruchu obrotowym ciała dla przyjętej osi wokół której ten obrót się wykonuje

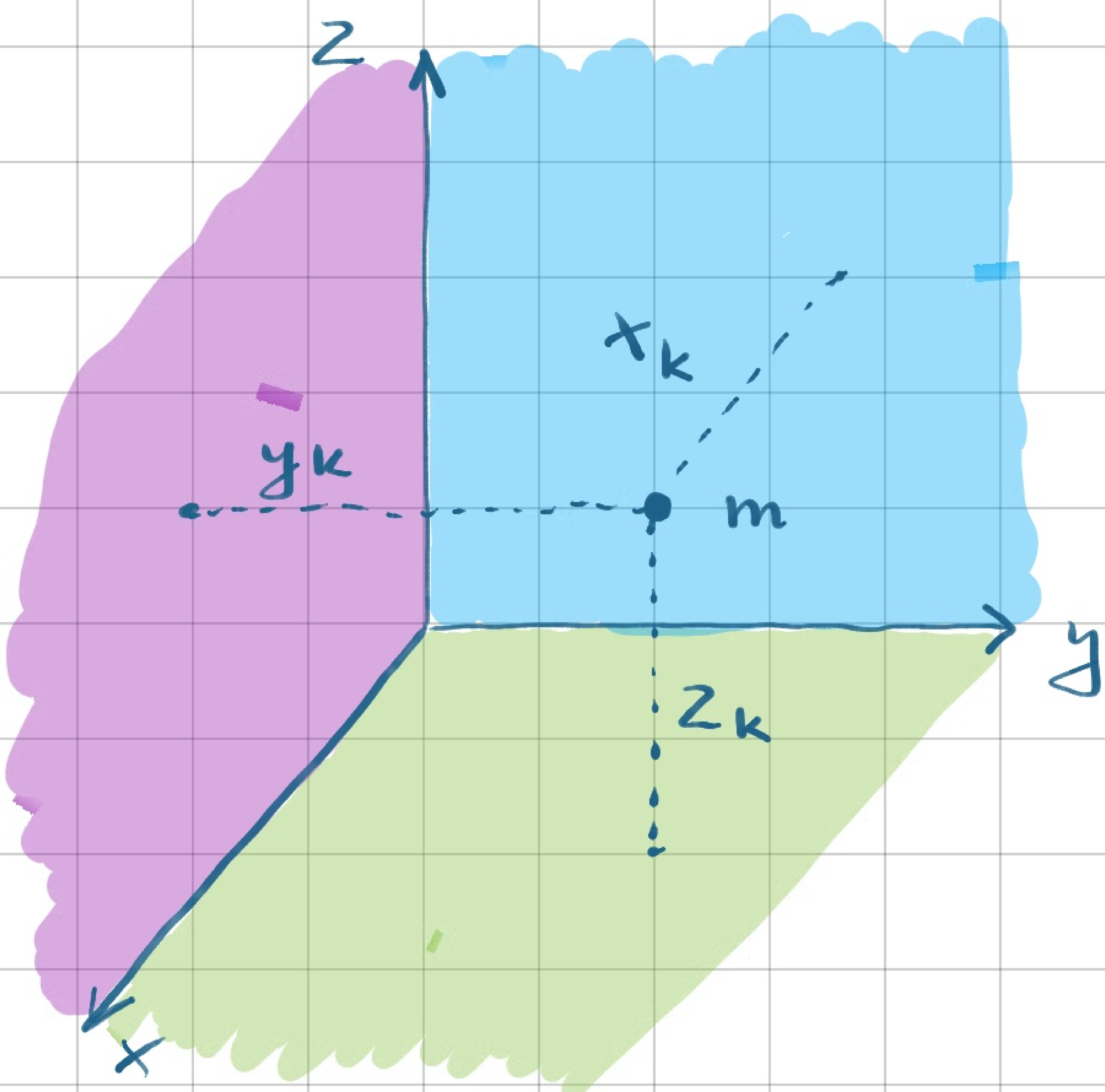
Momentem bezwładności punktu materialnego względem bieguna (punktu), płaszczyzny lub osi nazywamy iloczyn masy tego punktu i kwadratu jego odległości od bieguna, płaszczyzny lub osi.

BIEGUNOWY MOMENT BEZWŁADNOŚCI



$$I_o = \sum_{i=1}^{n} m_k r_k^2 = \sum_{i=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right)$$

MOMENT BEZWŁADNOŚCI WZGLĘDEM PŁASZCZYZNY

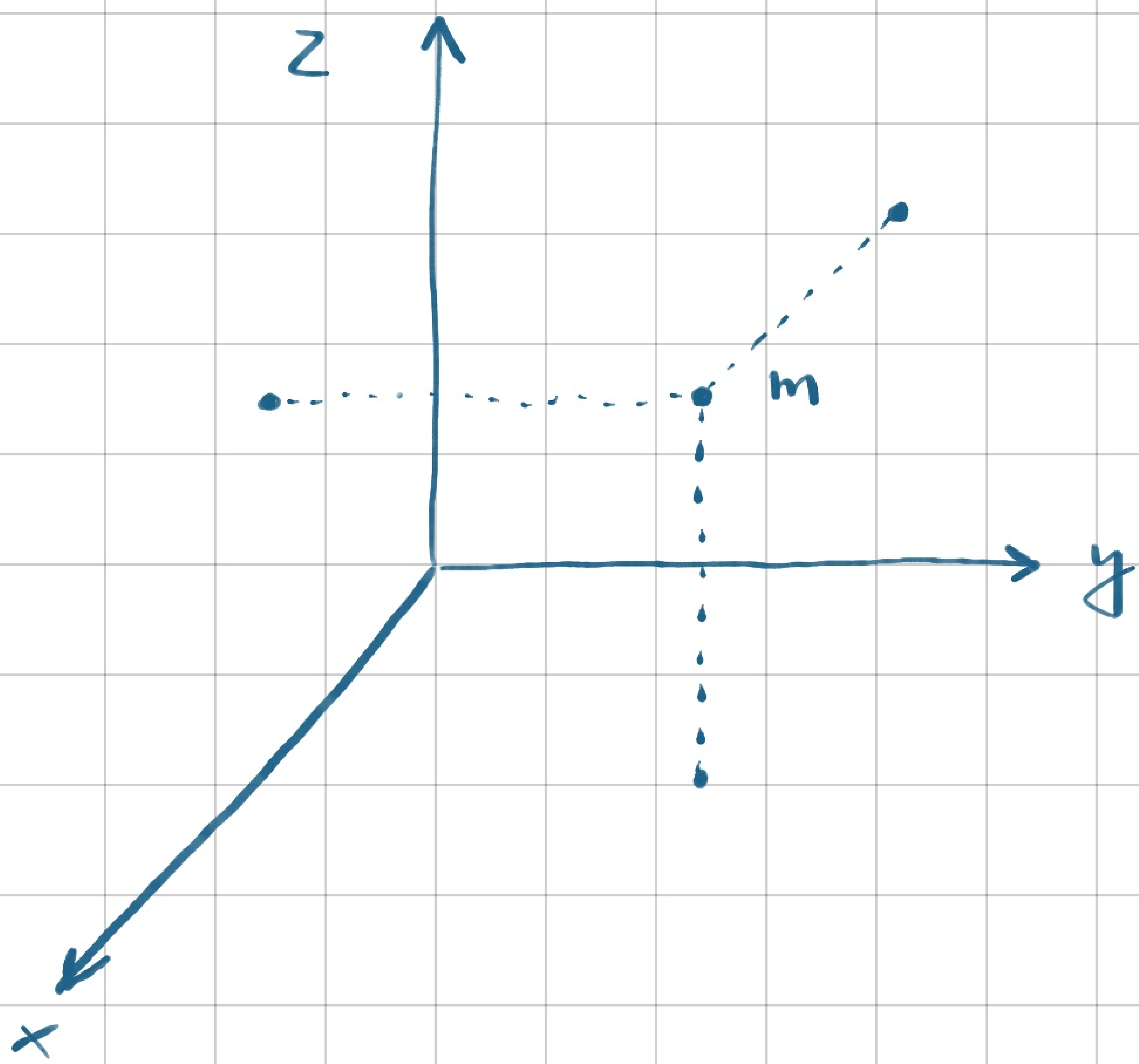


$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_k z_k^2$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_k x_k^2$$

$$I_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_k y_k^2$$

MOMENT BEZWŁADNOŚCI WZGLĘDEM OSI



$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_k d_{kx}^2$$ d - odległość od osi

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_k d_{kx}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_k \left(y_k^2 + z_k^2 \right)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} m_k d_{ky}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + z_k^2 \right)$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_k d_{kz}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + y_k^2 \right)$$

MOMENTY DEWIACYJNE D_{xy}, D_{yz}, D_{zx}

moment dewiacyjny - iloczyn masy przez iloczyn odległości od dwóch prostopadłych płaszczyzn

$$D_{xy} = D_{yx} = \sum_{i=1}^{n} m_k x_k y_k$$

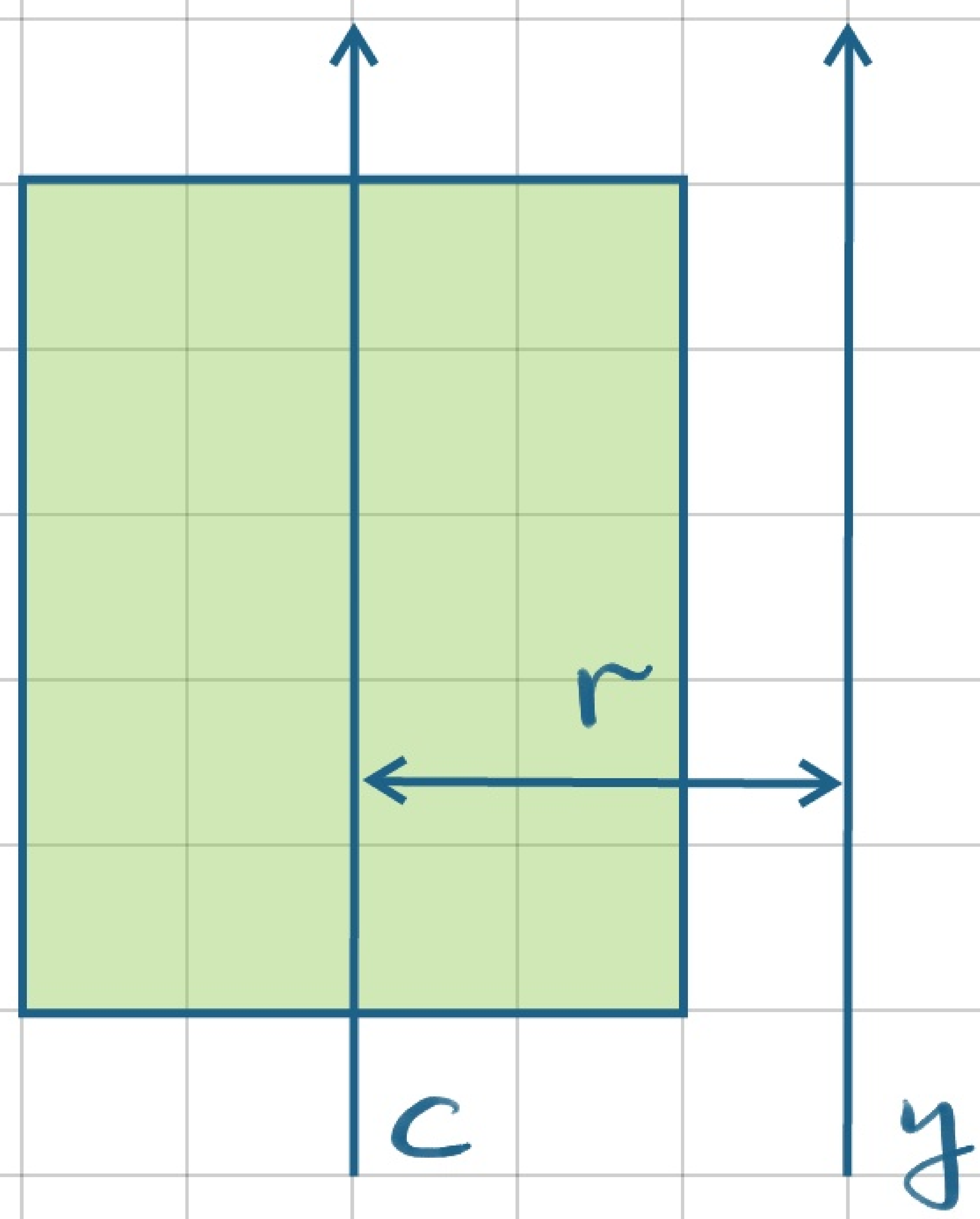
$$D_{yz} = D_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_k y_k z_k$$

$$D_{zx} = D_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_k z_k x_k$$

W zależności od położenie punktu iloczyn odległości od płaszczyzn może być dodatni bądź ujemny. Jeśli jedną z płaszczyzn jest płaszczyzna symetrii to moment dewiacyjny będzie zerowy.

TWIERDZENIE STEINERA

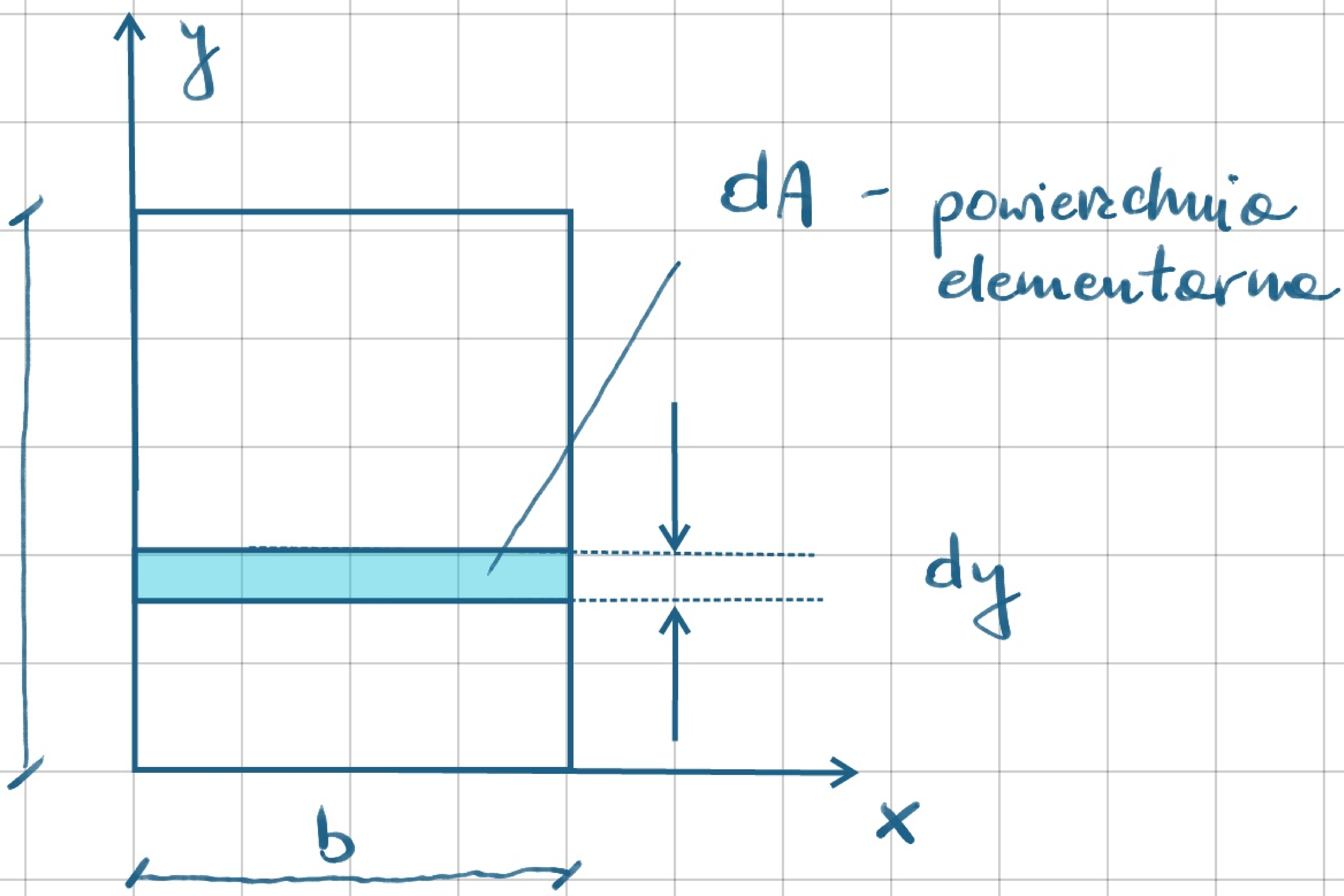
Moment bezwładności figury płaskiej względem dowolnej osi jest równy momentowi bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości tej figury powiększony o iloczyn masy figury i kwadratu odległości między tymi osiami.



$$I_y = I_c + mr^2$$

Jeśli dla figury płaskiej przyjmiemy, że gęstość jest stała i jednostkowa, to zamiast masy figury możemy wprowadzić pole jej powierzchni.

$$I_y = I_c + Ar^2$$



Policzmy moment bezwładności względem osi x. Przyjmijmy, że gęstość obiektu jest jednorodna i jednostkowa.

Zgodnie z definicją moment bezwładności względem osi x:

$$I_x = \int_A y^2 \, dA$$

powierzchnia elementarna dA wynosi

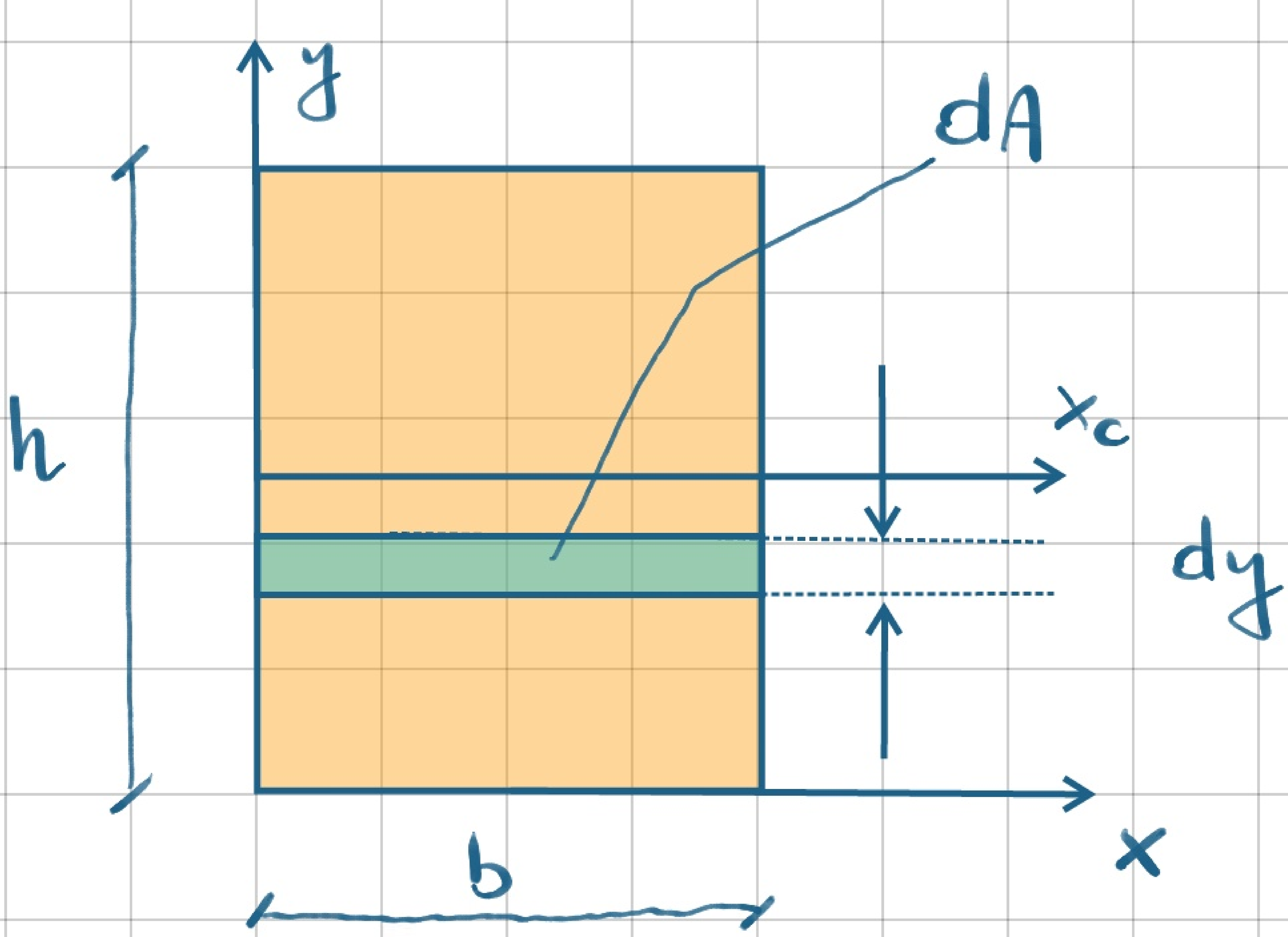
$$dA = x\,dy = b\,dy$$

$$\bar{I}_x = \int_0^h y^2 b\,dy = b\int_0^h y^2\,dy$$

$$= b\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

Moment bezwładności prostokąta o podstawie b i wysokości h względem osi x u podstawy wynosi

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{3}$$



Zgodnie z tw. Steinera

$$I_x = I_{x_c} + Ar^2$$

A – powierzchnia figury

r – odległość między osią I_x i I_{x_c}

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

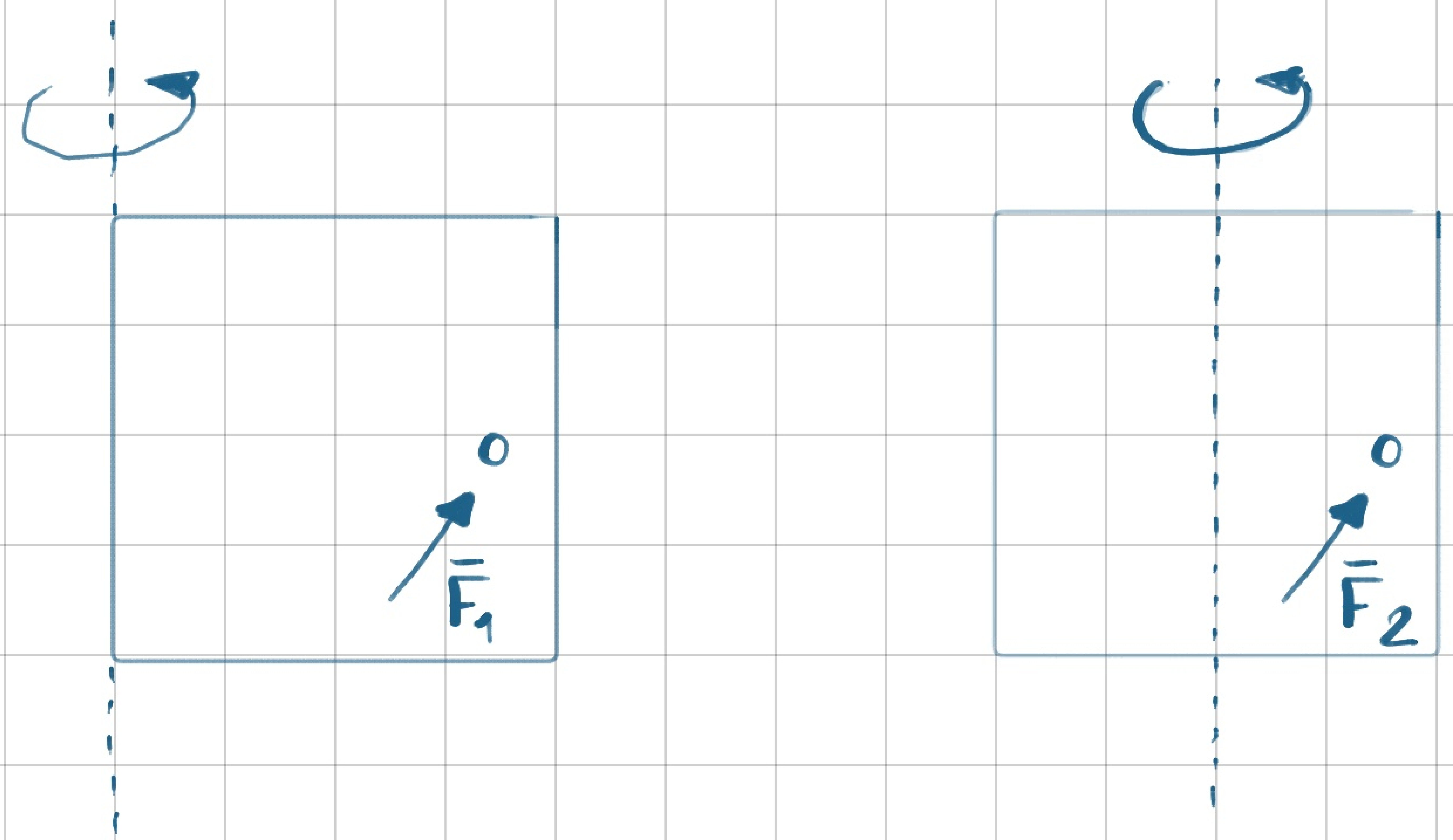
$$I_{x_c} = I_x - Ar^2$$

$$I_{x_c} = \frac{bh^3}{3} - bh \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4}$$

$$I_{x_c} = \frac{bh^3}{12}$$ → moment bezwładności prostokąta względem osi przechodzącej przez środek ciężkości figury

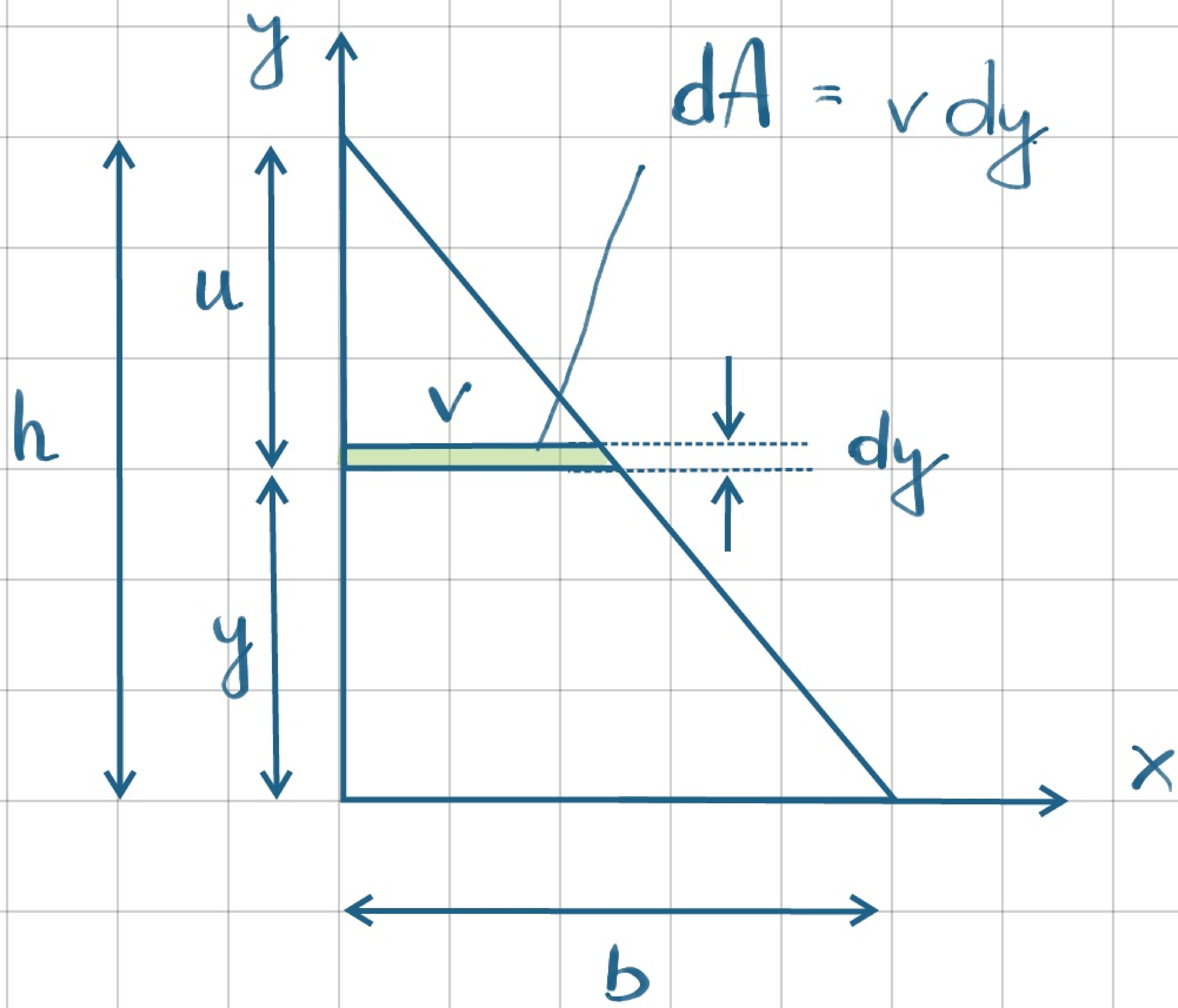
Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości figury jest najniższy z możliwych dla danej figury. Są to tzw. osie centralne.

Jeśli wyobrazimy sobie drzwi, zrobione z jednorodnego materiału, obrotowe, to intuicyjnie wiemy gdzie poprowadzić oś, żeby obracały się z użyciem najmniejszej siły.



Pojęcie środka ciężkości i momentu bezwładności okaże się pomocne przy próbie złapania równowagi, manipulowanie dużym ciężarem czy też wprawieniem go w ruch obrotowy.

Policzmy moment bezwładności dla trójkąta



powierzchnia elementarna dA zmienia się wraz ze zmianą współrzędnej y

$$\frac{u}{v} = \frac{h}{b} \qquad u = h - y$$

$$ub = h \cdot v$$

$$v = \frac{ub}{h}$$

$$v = \frac{(h-y)\cdot b}{h}$$

$$dA = \frac{(h-y)\cdot b}{h}\, dy$$

moment bezwładności trójkąta względem osi x

$$I_x = \int_A y^2 \, dA = \int_0^h y^2 \cdot \frac{(h-y)b}{h} \, dy$$

$$= \frac{b}{h} \int_0^h \left(y^2 h - y^3\right) dy = \frac{b}{h} \left(\frac{y^3 h}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Bigg|_0^h$$

$$= \frac{b}{h} \cdot \left(\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right) = \frac{b}{h} \cdot \frac{h^4}{12} = \frac{bh^3}{12}$$

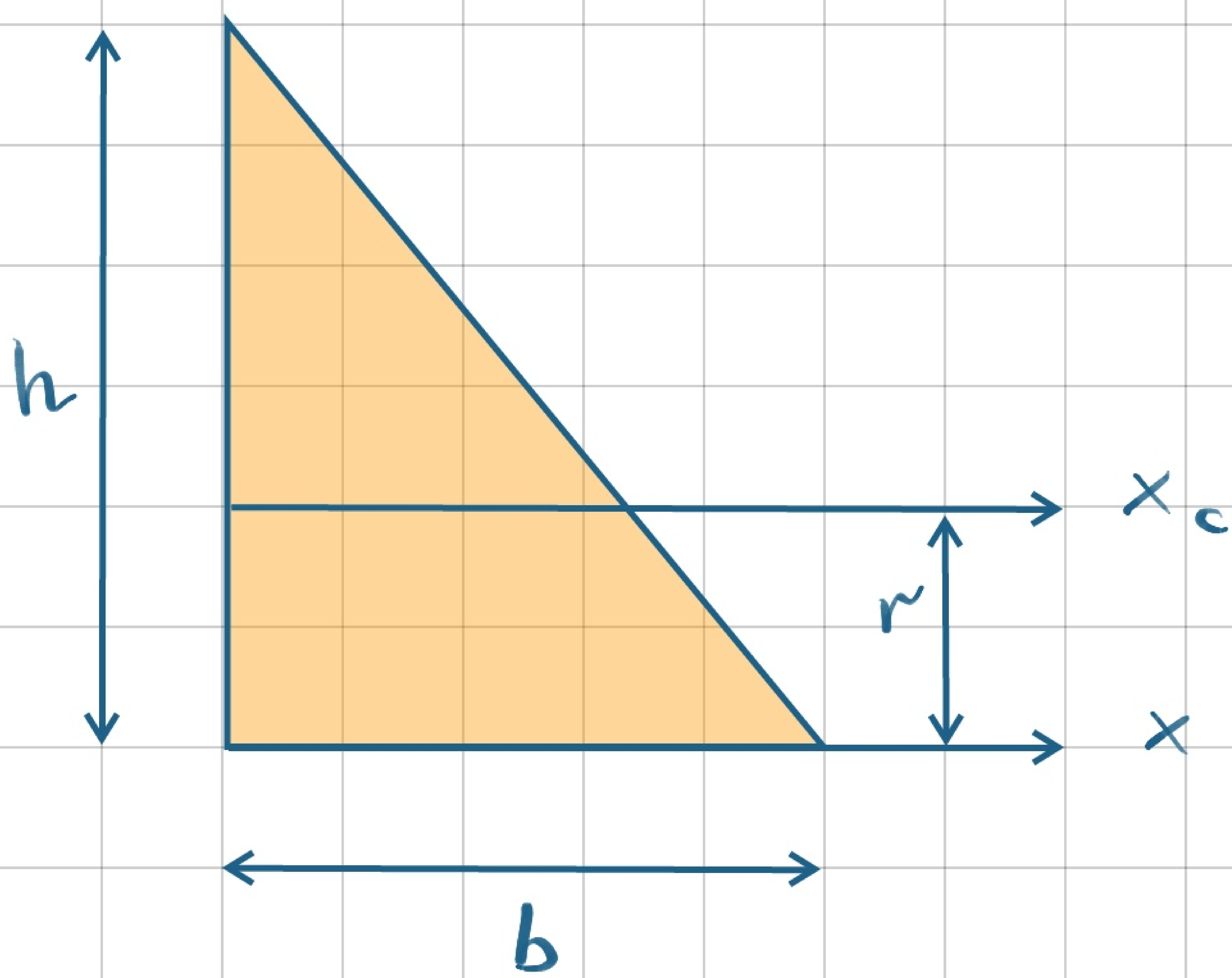
a korzystając z tw. Steinera względem osi x_c przechodzącej przez środek ciężkości trójkąta (leży na osi odległej o $\frac{1}{3}h$ od podstawy)

$$I_x = I_{x_c} + Ar^2$$

$$I_{x_c} = I_x - Ar^2$$

$$I_{x_c} = \frac{bh^3}{12} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2$$

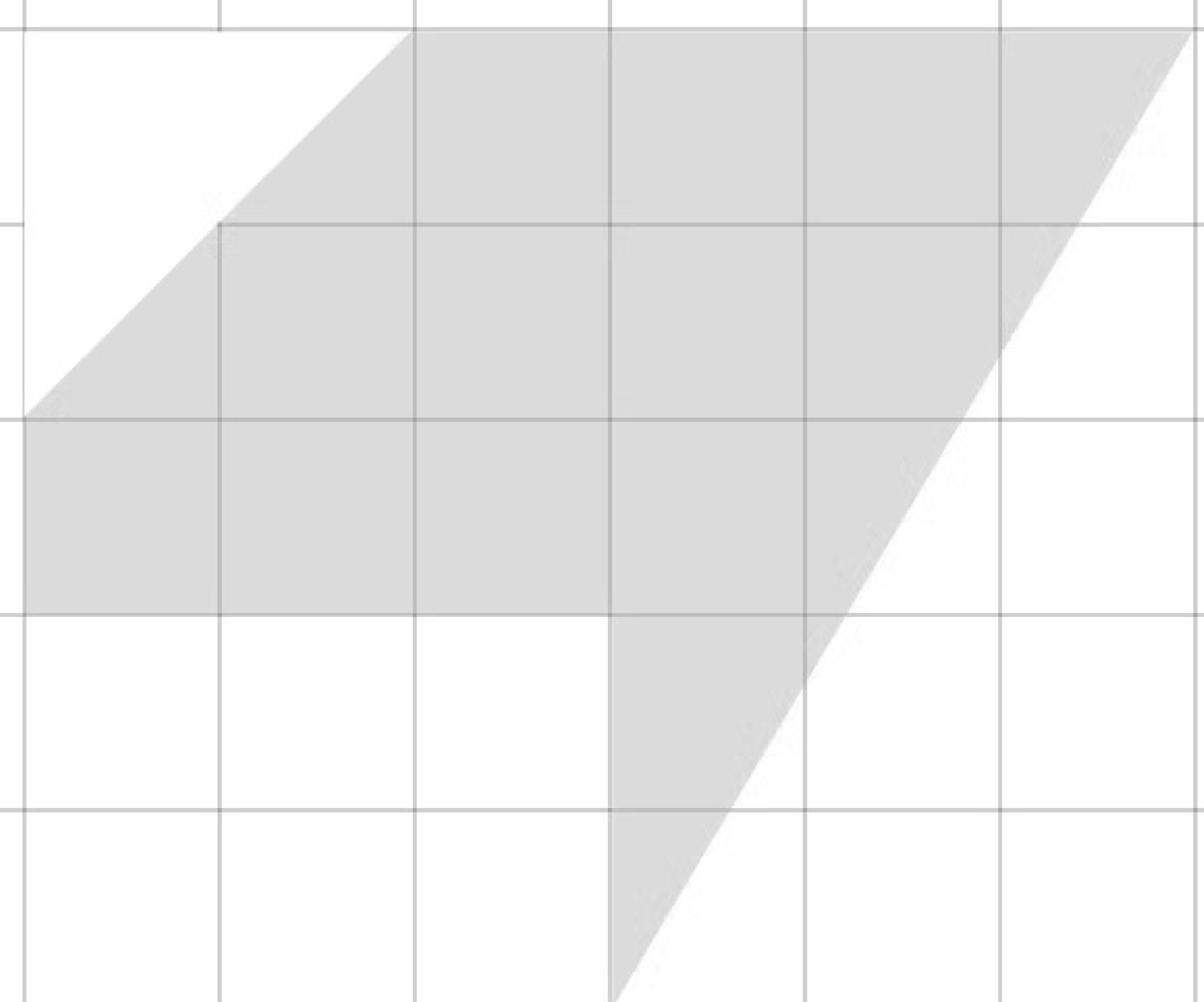
$$= \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}$$



$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_{x_c} = \frac{bh^3}{36}$$

Jeśli liczymy moment bezwładnosci I_y to pamiętajmy, że we wzorze b i h zamieniają się rolami.

Dla podanej figury złożonej wyznacz środek ciężkości a następnie wyznacz moment bezwładności względem osi x i y przechodzących przez ten środek ciężkości.



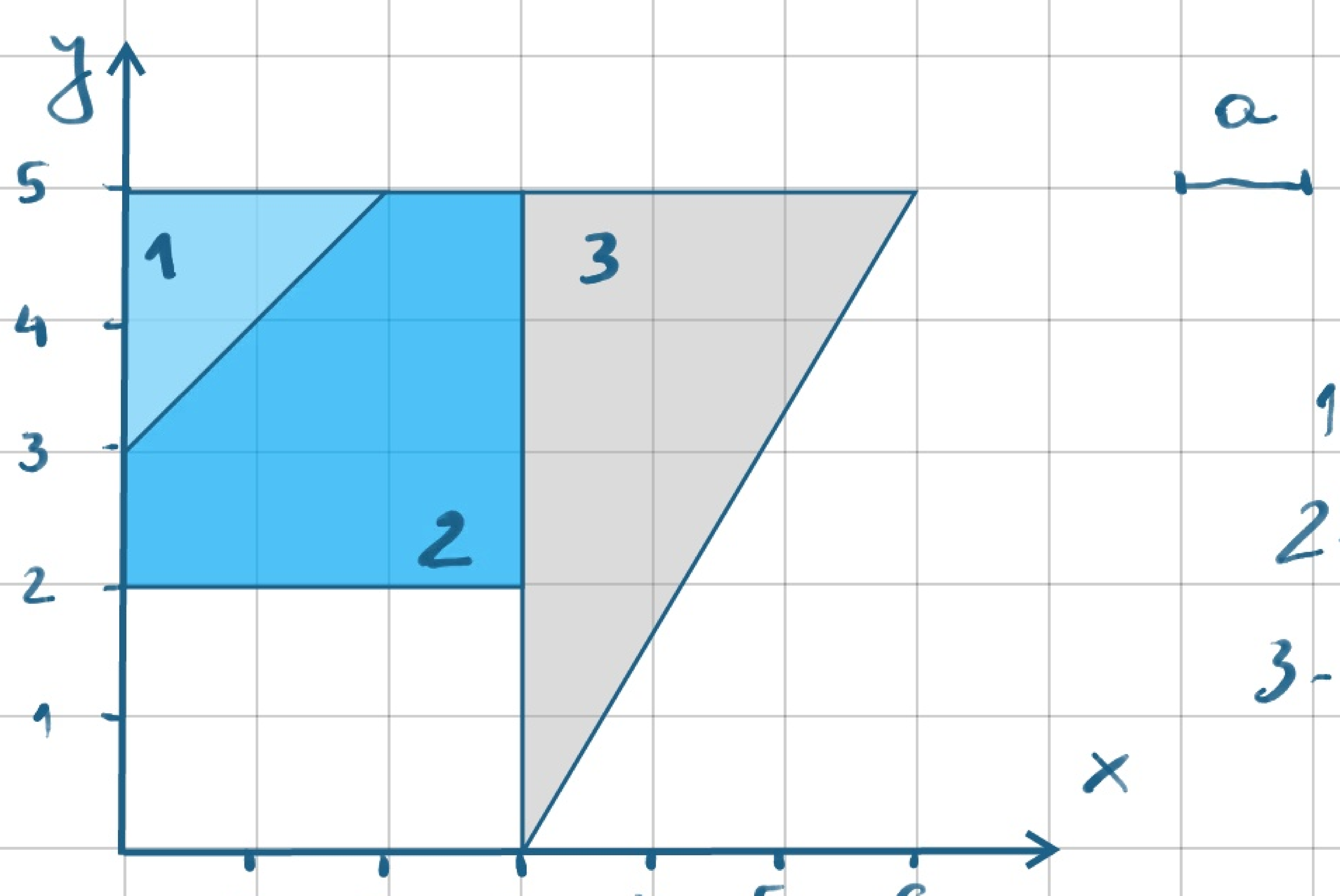
Kroki postępowanie:

- przyjąć układ współrzędnych wedle którego określimy położenie środka ciężkości, niezależnie od jego położenia sam środek ciężkości figury będzie zawsze na swoim miejscu
- podzielić figurę złożoną na figury proste, mogą to być wycinki istniejącej figury złożonej lub jej dopełnienia (ich udział będzie wówczas ujemny)

- dla figur prostych znaleźć położenie ich środków ciężkości i wyznaczyć położenie sumarycznego środka ciężkości

- przez sumaryczny środek ciężkości (x_c, y_c) puścić osie x i y, i dla nich (w oparciu o twierdzenie Steinera) obliczyć momenty bezwładności poszczególnych figur prostych

- obliczyć sumaryczny moment bezwładności figury złożonej - dodajemy figury proste, odejmujemy te, które odgrywają braki



1 - trójkąt

2 - pełny kwadrat

3 - trójkąt

Współrzędne środków ciężkości figur prostych i ich pole:

$x_1 = \frac{2}{3}a \quad y_1 = 4\frac{1}{3}a \quad A_1 = 2a^2$

$x_2 = 1{,}5a \quad y_2 = 3{,}5a \quad A_2 = 9a^2$

$x_3 = 4a \quad y_3 = 3\frac{1}{3}a \quad A_3 = 7{,}5a^2$

$$S_x = \int_A y\,dA = y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3 - y_1 \cdot A_1$$

$$= 3{,}5a \cdot 9a^2 + 3\frac{1}{3}a \cdot 7{,}5a^2 - 4\frac{1}{3}a \cdot 2a^2$$

$$= 31{,}5a^3 + 25a^3 - 8\frac{2}{3}a^3 \simeq 47{,}83a^3$$

$$S_y = \int_A x\,dA = x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3 - x_1 \cdot A_1 =$$

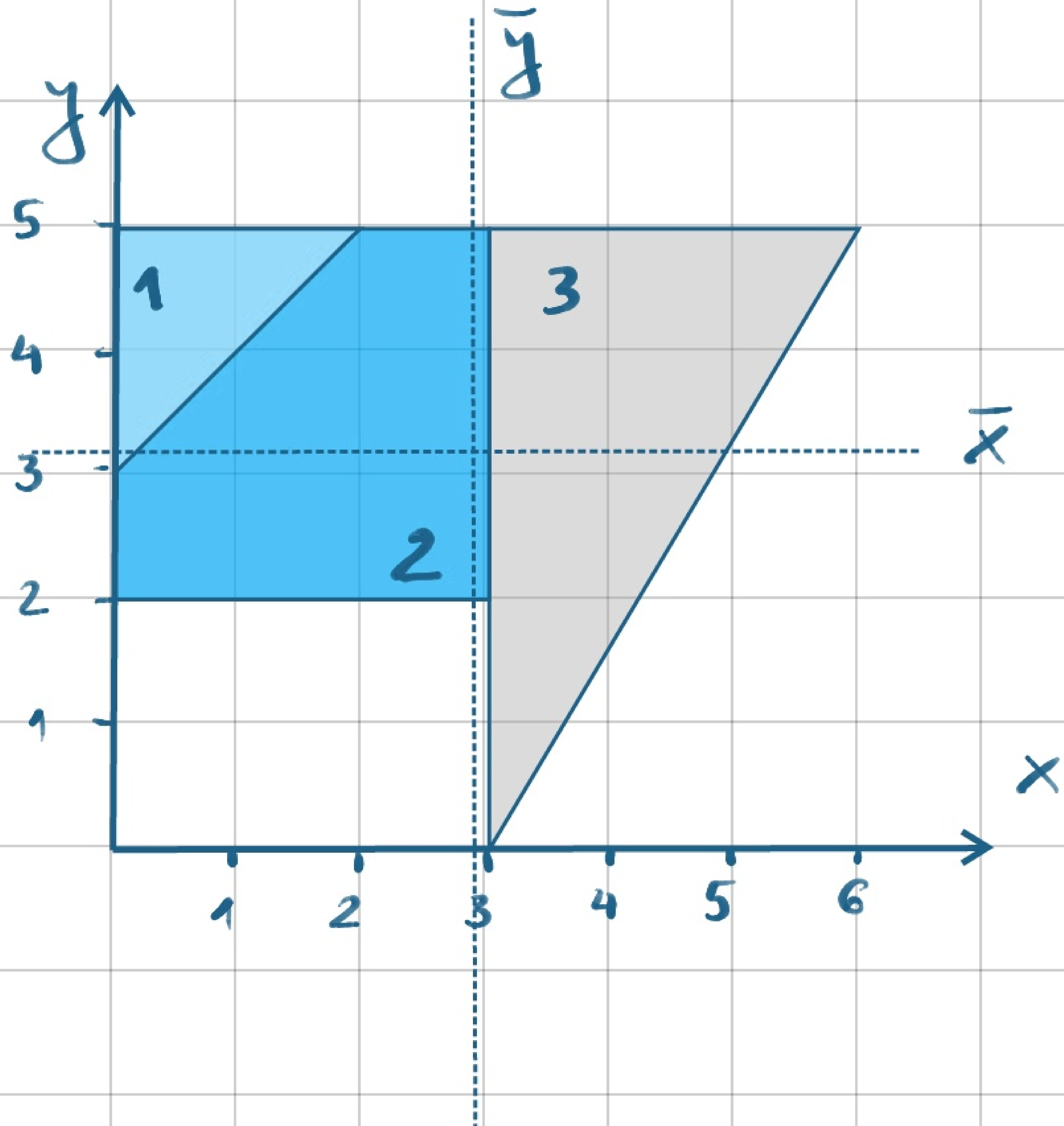
$$= 1{,}5a \cdot 9a^2 + 4a \cdot 7{,}5a^2 - \frac{2}{3}a \cdot 2a^2 =$$

$$= 13{,}5a^3 + 30a^3 - \frac{4}{3}a^3 \simeq 42{,}17a^3$$

$$A = 9a^2 + 7{,}5a^2 - 2a^2 = 14{,}5a^2$$

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{42{,}17a^3}{14{,}5a^2} \simeq 2{,}90a$$

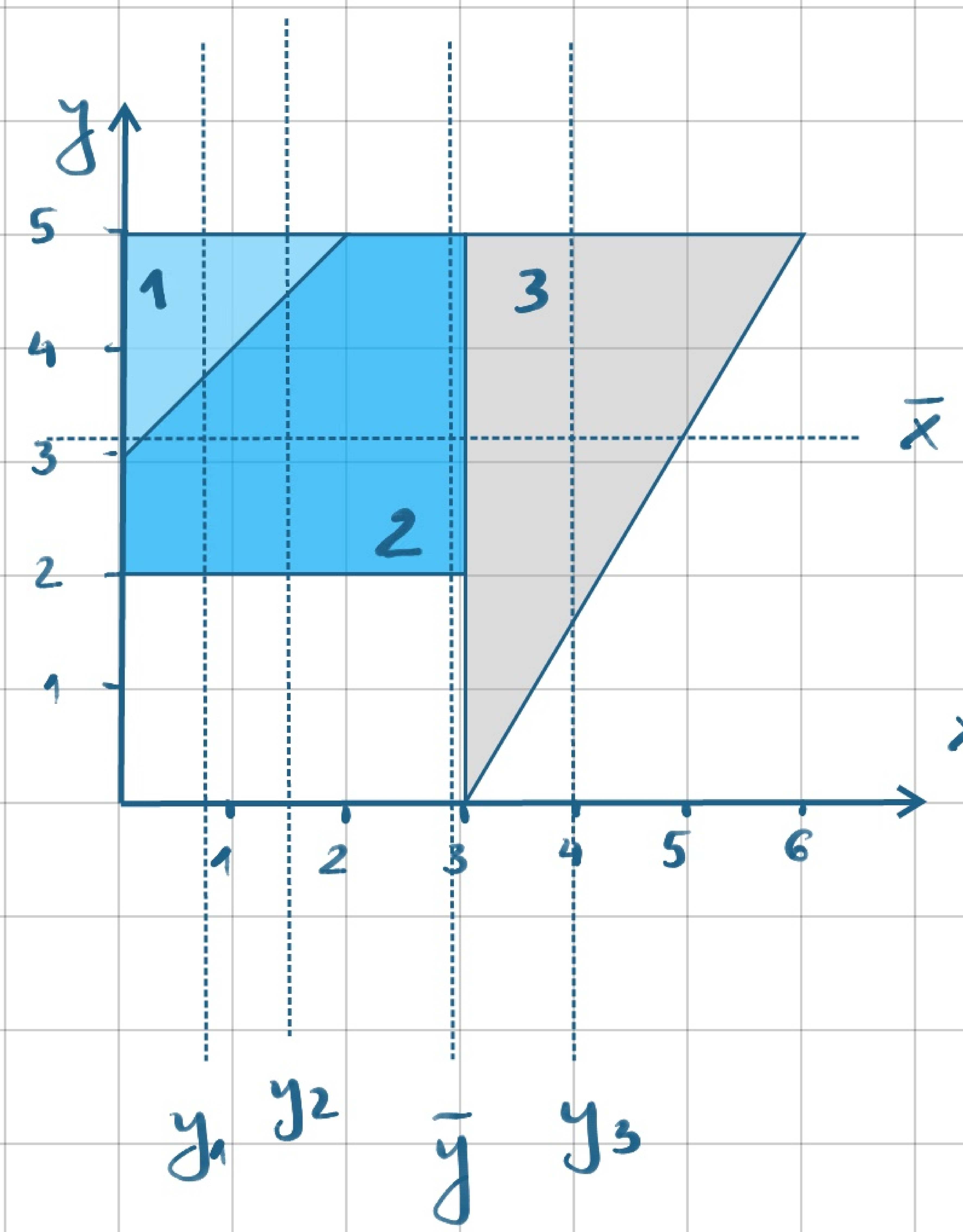
$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{47{,}83a^3}{14{,}5a^2} \simeq 3{,}30a$$



W książkach i niektórych opracowaniach x_c oraz y_c oznacza zarówno współrzędne środka ciężkości jak i osie.

Oś x_c przechodzi przez środek ciężkości na współrzędnej y_c, zaś oś y_c przechodzi przez środek ciężkości na współrzędnej x_c.

Mamy określone osie przechodzące przez środek ciężkości figury złożonej.



I_y^1 - moment bezwładności figury 1 względem osi $\bar{y}$

$$I_y^1 = I_{y_1}^1 + A_1 \cdot r_1^2$$

r_1 → odległość między osiami y_1 i $\bar{y}$

$I_{y_1}^1$ → moment bezwładności figury 1 względem osi y_1

$$I_y^1 = \frac{2a \cdot (2a)^3}{36} + 2a^2 \cdot \left(2{,}90a - \frac{2}{3}a\right)^2$$

$$= \frac{16a^4}{36} + 2a^2 \cdot 4{,}99a^2$$

$$= \frac{16a^4}{36} + 9{,}98a^4 = 10{,}42a^4$$

$$I_y^2 = \frac{3a \cdot (3a)^3}{12} + 9a^2 \cdot (2{,}90a - 1{,}5a)^2$$

$$= \frac{81a^4}{12} + 9a^2 \cdot 1{,}96a^2$$

$$= 6{,}75a^4 + 17{,}64a^4 = 24{,}39a^4$$

$$I_y^3 = \frac{5a \cdot (3a)^3}{36} + 7{,}5a^2 \cdot (4a - 2{,}90a)^2$$

$$= \frac{135a^4}{36} + 7{,}5a^2 \cdot 1{,}21a^2$$

$$= 3{,}75a^4 + 9{,}075a^4 = 12{,}825a^4$$

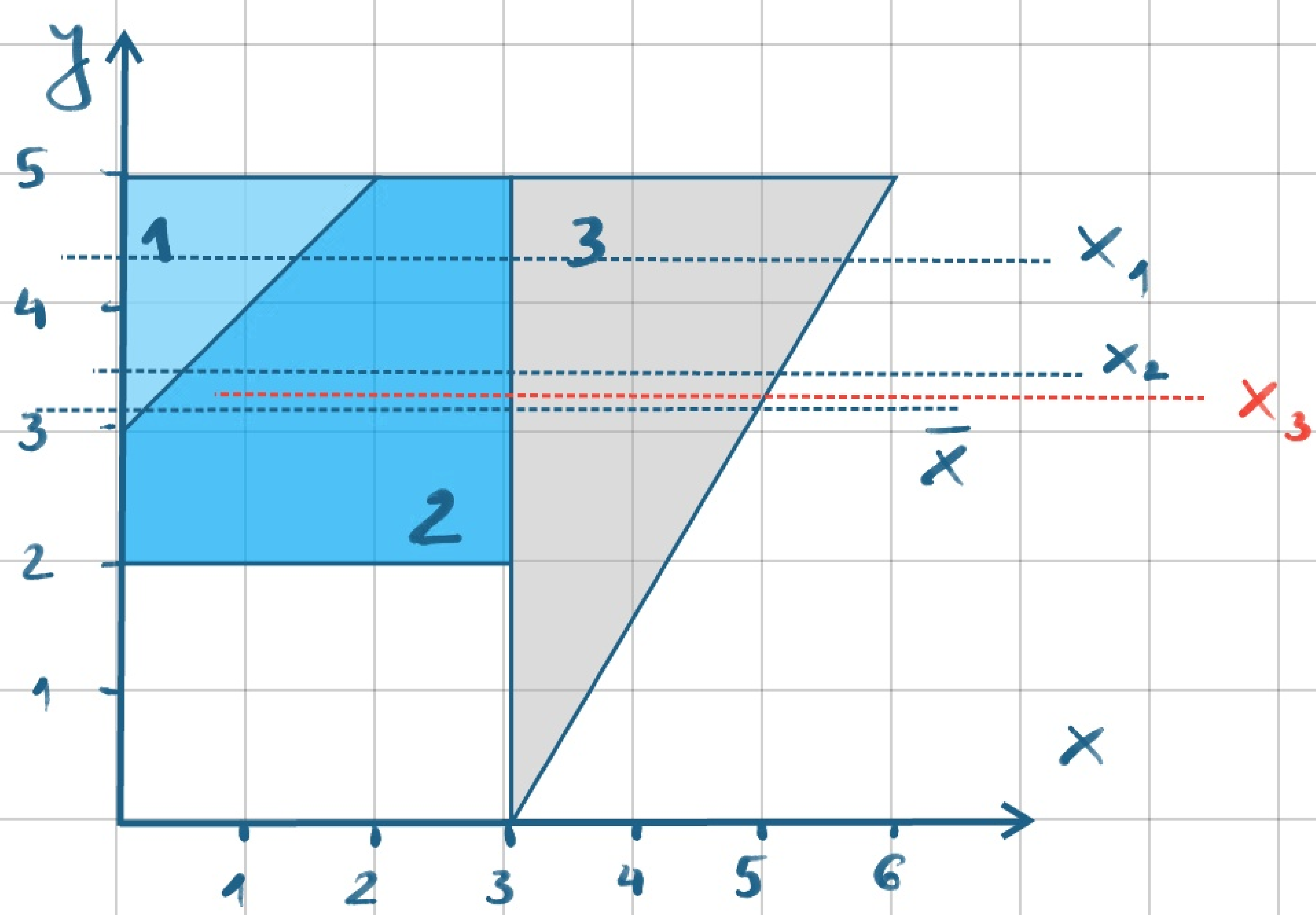
tutaj podstawa wynosi 5 a wysokość 3

Symetryczny moment bezwładności figury złożonej:

$$I_y = I_y^2 + I_y^3 - I_y^1 =$$

$$= 24,39a^4 + 12,825a^4 - 10,42a^4$$

$$= 26,795a^4$$



$$I_x^1 = \frac{2a \cdot 2a^3}{36} + 2a^2 \cdot \left(3,30a - 4\tfrac{1}{3}a\right)^2$$

$$= \frac{16a^4}{36} + 2a^2 \cdot 1,07a^2$$

$$= \frac{4}{9}a^4 + 2,14a^4 \simeq 2,54a^4$$

$$I_x^2 = \frac{3a \cdot (3a)^3}{12} + 9a^2 \cdot (3{,}30a - 3{,}5a)^2$$

$$= \frac{81a^4}{12} + 9a^2 \cdot \frac{4}{100}a^2$$

$$= 6{,}75a^4 + \frac{36}{100}a^4 \simeq 7{,}11a^4$$

$$I_x^3 = \frac{3a \cdot (5a)^3}{36} + 7{,}5a^2 \cdot \left(3{,}30a - 3\tfrac{1}{3}a\right)^2$$

$$= \frac{375a^4}{36} + 7{,}5a^2 \cdot \frac{9}{10000}a^2$$

$$= 10{,}42a^4 + 0{,}0675a^4 \simeq 10{,}49a^4$$

$$I_x = 7{,}11a^4 + 10{,}49a^4 - 2{,}54a^4$$

$$= 15{,}06a^4$$

Momenty bezwładności są ZAWSZE DODATNIE. Jeśli z naszych obliczeń moment bezwładności wychodzi ujemny, to znaczy to, że coś jest BARDZO, BARDZO ŹLE.