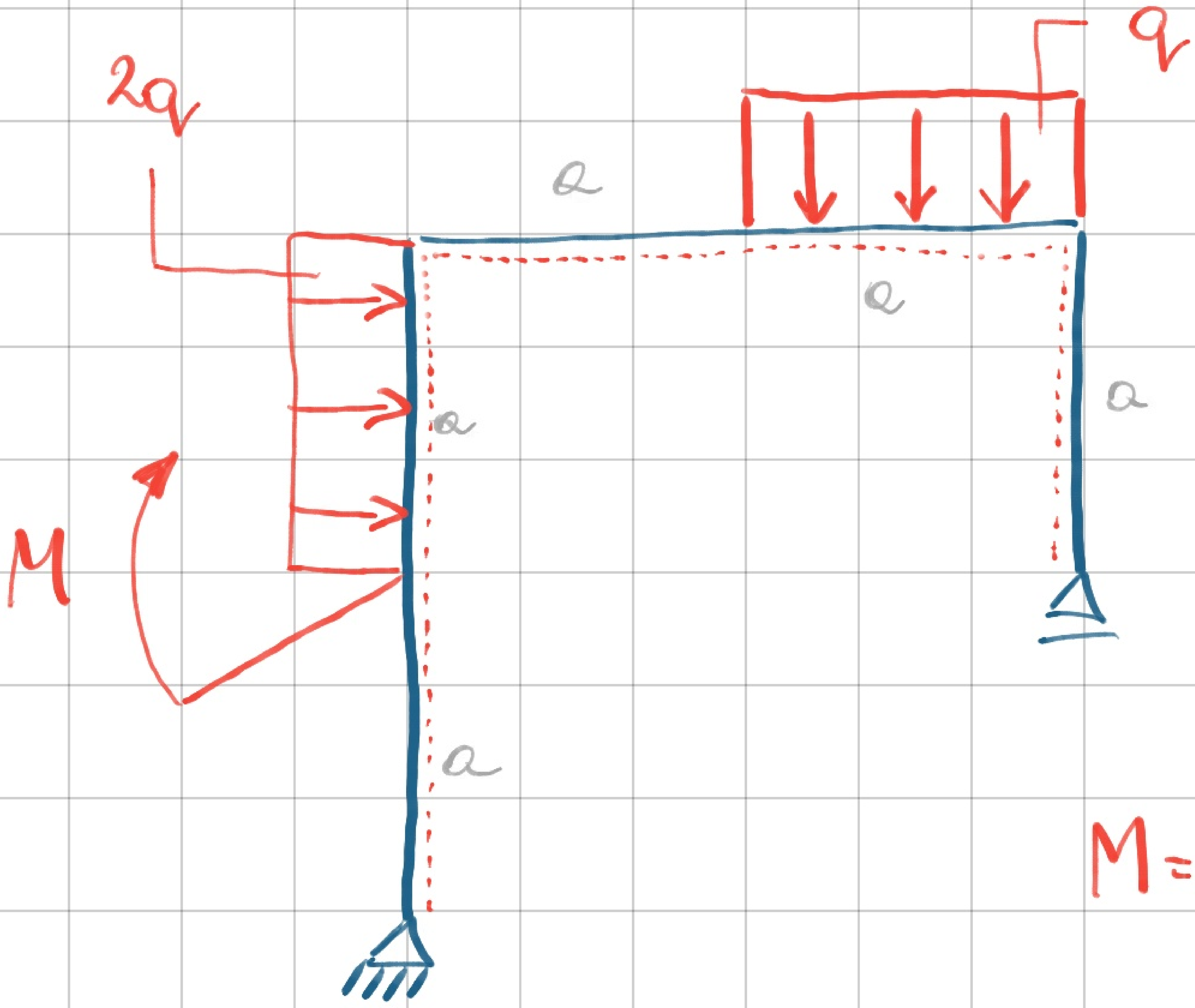
RAMY

Ramy to konstrukcje prętowe, w których pręty są sztywno połączone. To z kolei powoduje, że pomiędzy prętami następuje przenoszenie momentu gnącego.

Ze względu na geometrię ram, może się okazać, że siły normalne w jednym pręcie w drugim staną się siłami tnącymi.

Podobnie jak w przypadku kratownic i belek zakładamy, że struktura jest nieważka oraz że nie nastąpi zmiana wymiarów geometrycznych.

Rama to w gruncie rzeczy układ połączonych belek. Dlatego też praktyka z belek bardzo się przyda przy rozwiązywaniu problemów dotyczących ram.

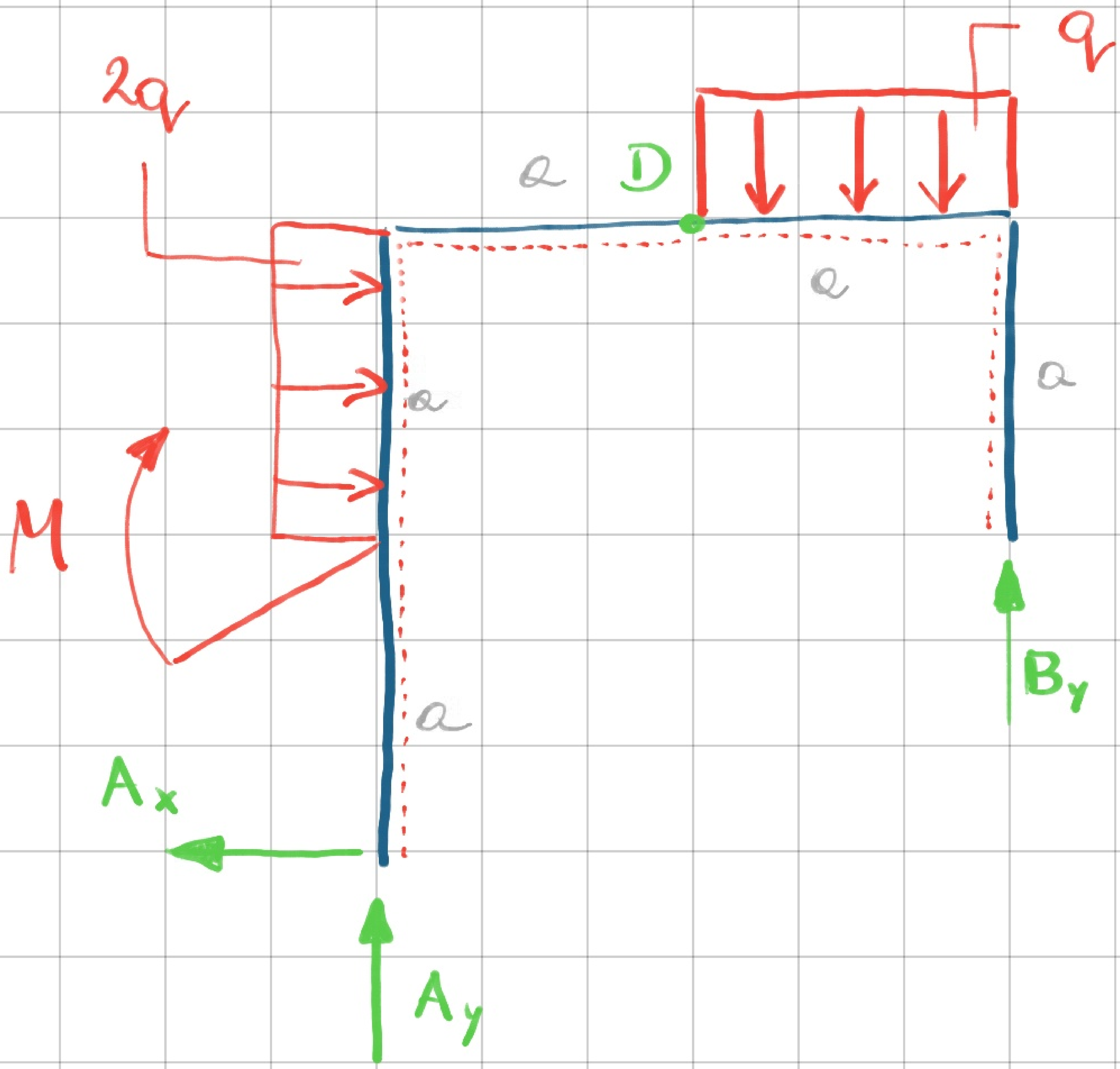


$M = qa^2$

W ramie podobnie jak w belce wyznaczamy po której stronie znajdują się włókna rozciągane. W odcinkach poziomych możemy oznaczyć je tak jak belki - od spodu. W odcinkach pionowych musimy wybrać, ale potem być konsekwentni.

Kolejno wyznaczamy reakcje w podporach i sprawdzamy.

Następnie wyznaczamy przedziały. Zasady są takie jak w przypadku belek. Dochodzi jeszcze tylko granica w momencie zmiany kierunku pręta.



zwrot A_x przyjąłem od razu w lewo, bo wiedziałem, że odpowieda tylko na obciążenie ciągłe 2q

$$\Sigma F_x: \ -A_x + 2qa = 0$$

$$\Sigma F_y: \ A_y + B_y - qa = 0$$

$$\Sigma M^A: \ M + 2q \cdot a \cdot 1{,}5a + q \cdot a \cdot 1{,}5a - B_y \cdot 2a = 0$$

$$A_x = 2qa$$

$$M + 3qa^2 + 1{,}5qa^2 - 2aB_y = 0$$

$$qa^2 + 3qa^2 + 1{,}5qa^2 = 2aB_y$$

$$5{,}5\,qa = 2B_y$$

$$B_y = 2{,}75\,qa$$

$$A_y + B_y - qa = 0$$

$$A_y = qa - B_y$$

$$A_y = -1{,}75\,qa$$

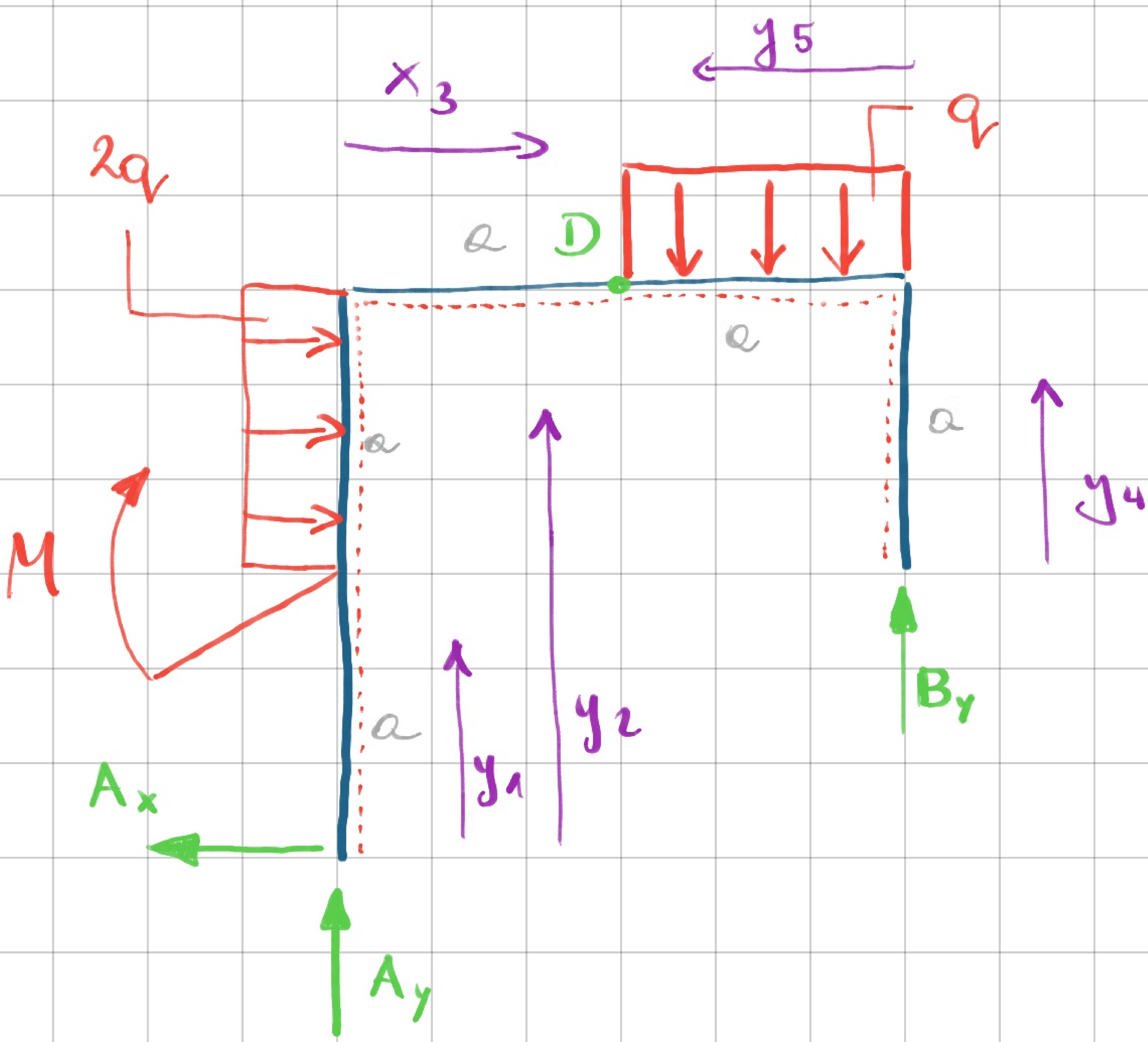
SPRAWDZENIE REAKCJI

$$\Sigma M^D:\ A_y\cdot a + A_x\cdot 2a + M - 2qa\cdot\frac{1}{2}a + qa\cdot\frac{1}{2}a - B_y a = 0$$

$$-1{,}75qa^2 + 4qa^2 + qa^2 - qa^2 + \frac{1}{2}qa^2 - 2{,}75qa^2 = 0$$

$$0 = 0 \qquad \text{ok!}$$

Teraz czas na wyznaczenie przedziałów. Oczywiście warto obliczenie prowadzić z obu stron ramy, co znacznie skróci równanie i same obliczenie.



Przedział I – przyjęcie włókien rozciąganych w sposób pokazany na rysunku pozwala prowadzić obliczenia jak dla belki od lewej strony.

$Mg^{I}: A_x \cdot y_1$

zauważmy, że siła A_x ma charakter siły tnącej

$$Mg^{I}(y_1 = 0) = 0$$

$$Mg^{I}(y_1 = a) = A_x a = 2qa^2$$

$$T^{I} = A_x = 2qa$$

Przedział $\underline{II}$

$$Mg^{II} = A_x \cdot y_2 + M - 2q(y_2 - a)\frac{(y_2 - a)}{2}$$

$$Mg^{II} = A_x y_2 + M - q(y_2 - a)^2$$

$$Mg^{II}(y_2 = a) = 2qa^2 + qa^2 = 3qa^2$$

$$Mg^{II}(y_2 = 2a) = 4qa^2 + qa^2 - qa^2 = 4qa^2$$

$$T^{II} = A_x - 2q(y_2 - a)$$

$$T^{II}(y_2 = a) = A_x = 2qa$$

$$T^{II}(y_2 = 2a) = A_x - 2qa = 0$$

Przedział $\overline{\underline{III}}$ – przejście do przedziału $\overline{III}$ jest bardzo istotne – nastąpi tu kilka ważnych zmian – zostanie przeniesiony moment gnący z przedziału $\underline{II}$ jak również w przedziale tym charakter siły tnącej przyjmie siłę A_y przenoszoną od przedziału $\underline{III}$ przez pierwszy pręt ramy.

Przedział $\underline{III}$

$$Mg^{III} = Mg^{II}(y_2 = 2a) + A_y x_3$$

$$Mg^{III}(x_3 = 0) = Mg^{II}(y_2 = 2a) = 4qa^2$$

$$Mg^{III}(x_3 = a) = 4qa^2 - 1{,}75qa^2 = 2{,}25qa^2$$

$$T^{III} = A_y = -1{,}75qa$$

Przedziały $\underline{IV}$ i $\underline{V}$ zostaną wyznaczone od prawej strony.

Przedział $\underline{IV}$ – brakuje siły o charakterze tnącym zatem $Mg = 0$ i $T = 0$
Siła B_y jest w tym przedziale siłą normalną.

Przedział $\underline{V}$ – co do zasady następuje tu przeniesienie Mg^{IV} o wartości na końcu przedziału IV ale jest on zerowy.
Siła B_y przyjmuje charakter siły tnącej

$$Mg^{\bar{V}} = 0 + B_y x_5 - q x_5 \cdot \frac{x_5}{2}$$

$$Mg^{\bar{V}} = B_y x_5 - \frac{q x_5^2}{2}$$

$$Mg^{\bar{V}}(x_5 = 0) = 0$$

$$Mg^{\bar{V}}(x_5 = a) = 2{,}75qa^2 - \frac{1}{2}qa^2 = 2{,}25qa^2$$

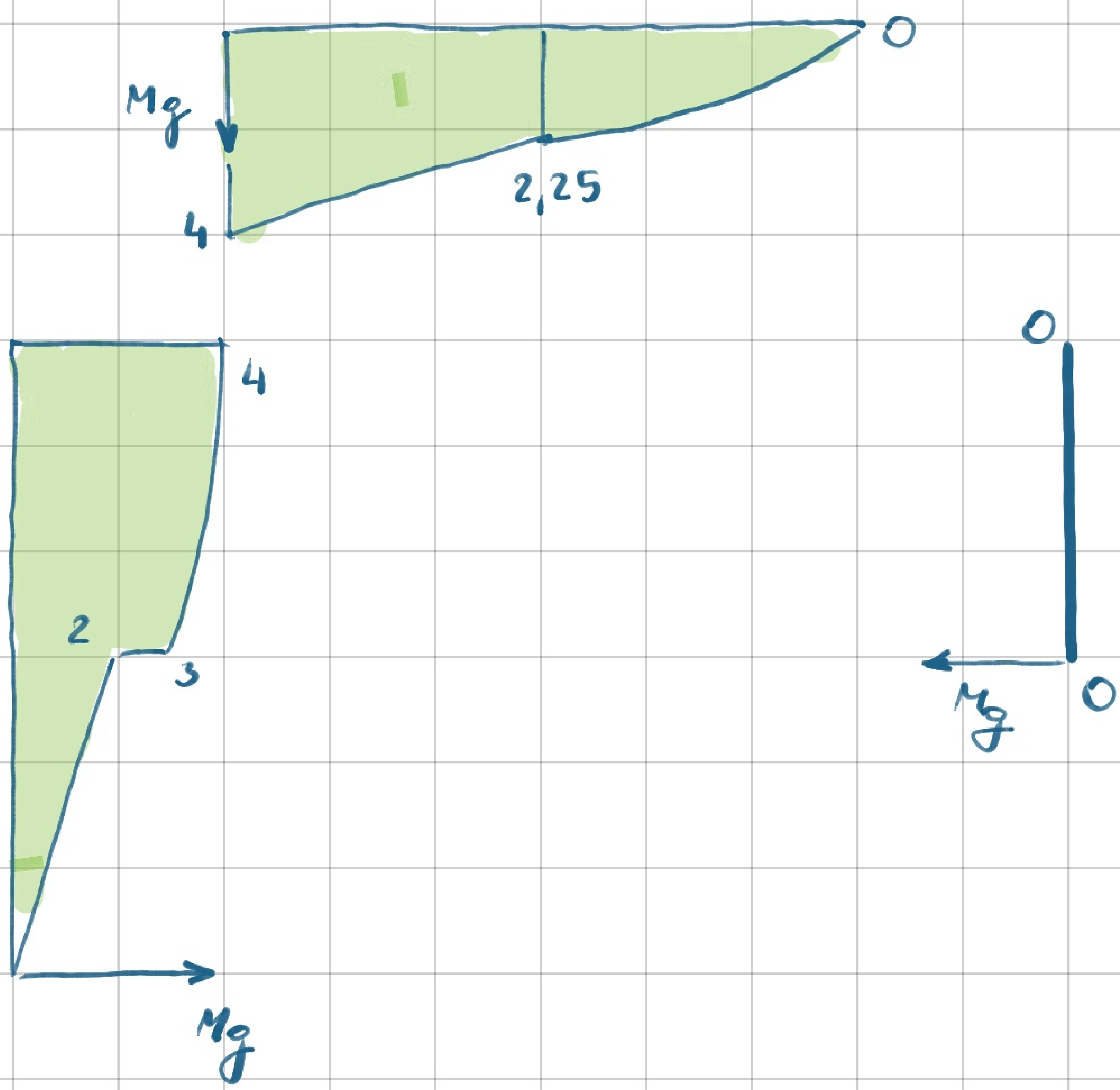
$$T^{\bar{V}} = -B_y + qx_5$$

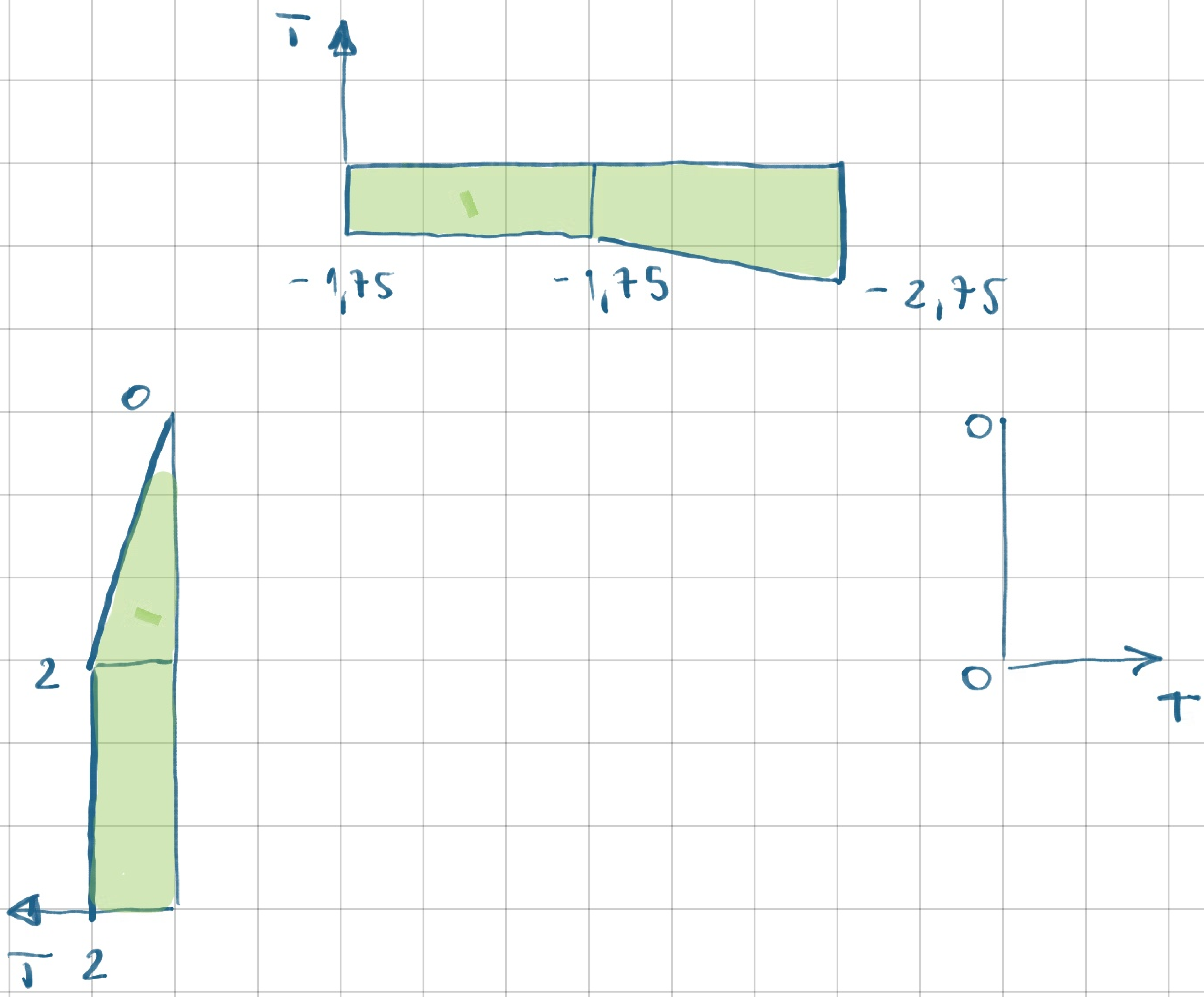
$$T^{\bar{V}}(x_5 = 0) = -B_y = -2{,}75qa$$

$$T^{\bar{V}}(x_5 = a) = -2{,}75qa + qa = -1{,}75qa$$

Wartości Mg i T na końcach przedziałów $\overline{III}$ i $\overline{V}$ zbiegają się, co wskazuje, że obliczenia poprowadzone zostały prawidłowo.

Wykres Mg i T opracowuje się tak jak dla belek. Można ewentualnie, dla zachowania czytelności, rozdzielić ramę na poszczególne pręty.

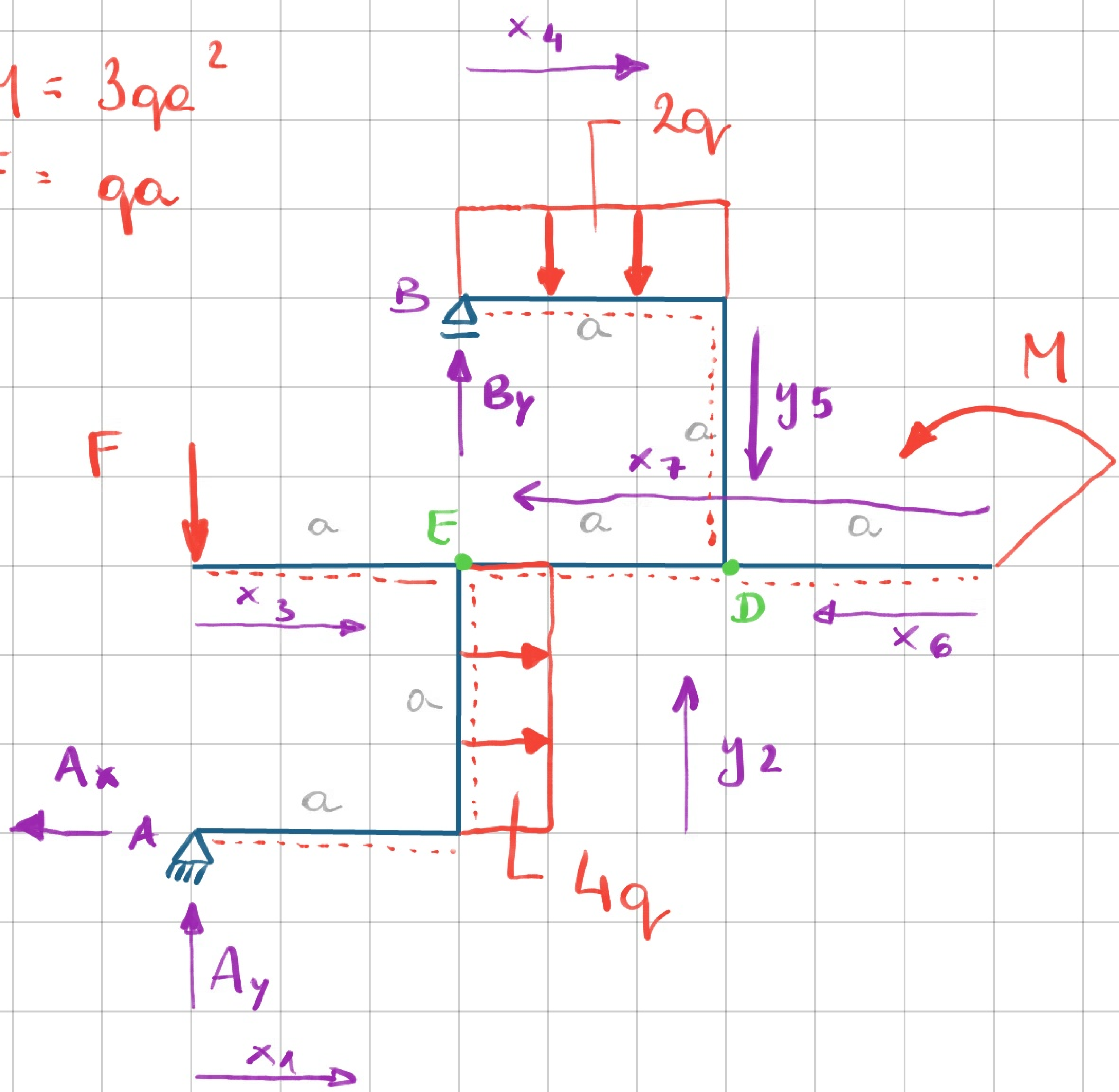

0
Mg
2,25
4
0
4
2
3
Mg
0
Mg


T
-1,75
-1,75
-2,75
0
0
2
0
T
T
2

Rama bardziej skomplikowana

$M = 3qa^2$

$F = qa$



$$\sum F_x: \; -A_x + 4qa = 0$$

$$\sum F_y: \; A_y - 2qa + B_y - F = 0$$

$$\sum M^A: \; -B_y \cdot a + 2qa \cdot 1{,}5a - M + 4qa \cdot \tfrac{1}{2}a = 0$$

* Punkty D i E są potrzebne w dalszej części analizy.

$A_x = 4qa$

$B_y a = 3qa^2 - 3qa^2 + 2qa^2$

$B_y = 2qa$

$A_y = F + 2qa - B_y$

$A_y = qa$

SPRAWDZENIE REAKCJI

$\Sigma M^P: A_y \cdot 2a + A_x a - F \cdot 2a - 4qa \cdot \frac{1}{2}a + B_y a - 2qa \cdot \frac{1}{2}a - M = 0$

$2qa^2 + 4qa^2 - 2qa^2 - 2qa^2 + 2qa^2 - qa^2 - 3qa^2 = 0$

$0 = 0$ OK!

$Mg^{I}: A_y \cdot x_1$

$Mg^{I}(x_1 = 0) = 0$ $Mg^{I}(x_1 = a) = qa^2$

$T^{I} = A_y = qa$

$$Mg^{II}: Mg^{I}(x_1 = a) + A_x \cdot y_2 - 4q y_2 \cdot \frac{y^2}{2}$$

$$Mg^{II}: qa^2 + A_x y_2 - 2q y_2^2$$

$$Mg^{II}(y_2 = 0) = qa^2$$

$$Mg^{II}(y_2 = a) = qa^2 + 4qa^2 - 2qa^2 = 3qa^2$$

$$T^{II} = A_x - 4q y_2$$

$$T^{II}(y_2 = 0) = A_x = 4qa$$

$$T^{II}(y_2 = a) = 4qa - 4qa = 0$$

$$Mg^{III}: -F \cdot x_3$$

$$Mg^{III}(x_3 = 0) = 0 \qquad Mg^{III}(x_3 = a) = -qa^2$$

$$T^{III} = -F = -qa$$

$$Mg^{\overline{IV}}: \; B_y x_4 - 2q \cdot x_4 \cdot \frac{x_4}{2} = B_y x_4 - q x_4^2$$

$$Mg^{\overline{IV}}(x_4 = 0) = 0$$

$$Mg^{\overline{IV}}(x_4 = a) = 2qa^2 - qa^2 = qa^2$$

$$T^{\overline{IV}}: \; B_y - 2q x_4$$

$$T^{\overline{IV}}(x_4 = 0) = 2qa$$

$$T^{\overline{IV}}(x_4 = a) = 2qa - 2qa = 0$$

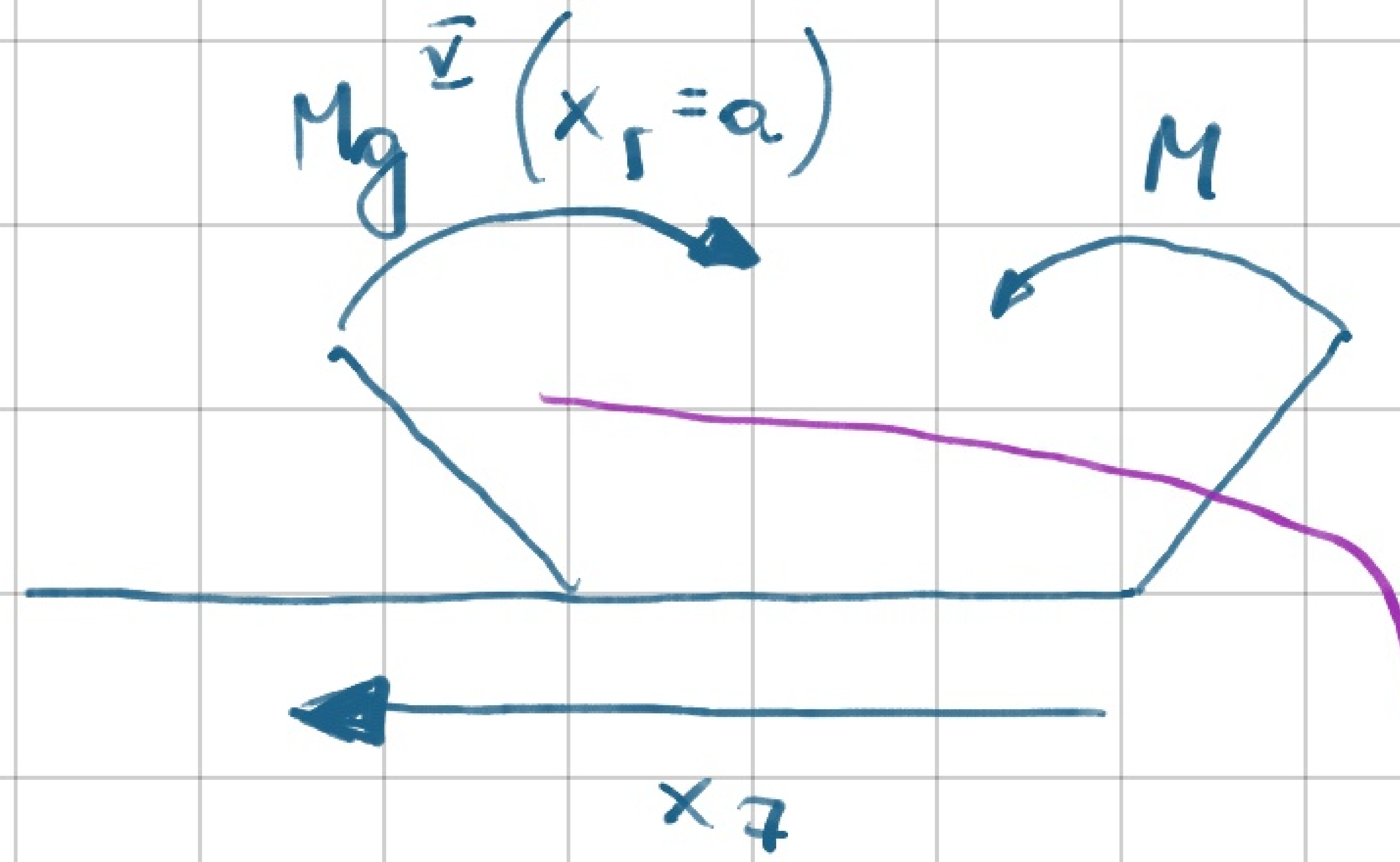
$$Mg^{\overline{V}}: \; Mg^{\overline{IV}}(x_4 = a) = qa^2$$

$$T^{\overline{V}}: \; 0$$

$$Mg^{\overline{VI}}: \; M = 3qa^2$$

$$T^{\overline{VI}}: \; 0$$

Przedział VII jest o tyle nowy, że stanowi kontynuację przedziału $\overline{VI}$, ale dołączy się jeszcze moment gnący z przedziału $\overline{V}$, z jego końca



$Mg^{\overline{VII}}: \; M - Mg^{\overline{V}}(x_5=a)$

$Mg^{\overline{VII}}: \; 3qa^2 - qa^2 = 2qa^2$

$T^{\overline{VII}}: \; 0$

Skąd taka orientacja momentu $Mg^{\overline{V}}(x_5=a)$?

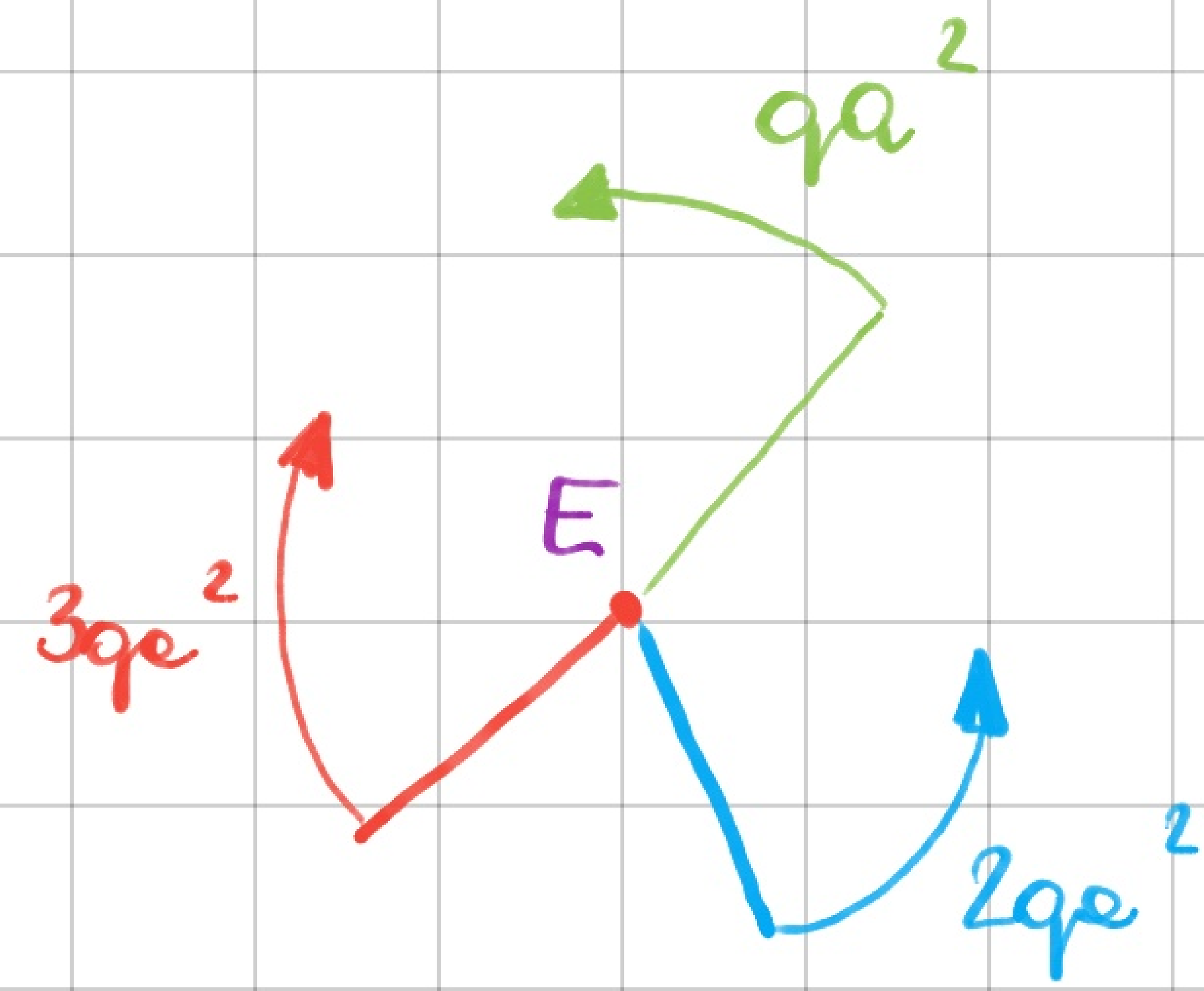
Bierze się ona stąd, że na końcu przedziału $\overline{V}$ uzyskano moment gnący o wartości qa^2. Dla włókien rozciąganych przyjętych jak na rysunku, moment dodatni będzie miał taką właśnie orientację. Podsumowując: zredukowaliśmy fragmenty IV i V do momentu, który uzupełnił $Mg^{\overline{VII}}$.

W tej ramie istnieją dwa punkty, w których schodzą się pręty. Oznaczymy je jako D i E. Możemy sprawdzić, czy suma momentów schodzących się w tych punktach sprowadza się do zera. Tak być powinno - w żadnym z punktów nie ma momentu skupionego.

$$M_g^{II}(y_2 = a) = 3qa^2$$

$$M_g^{III}(x_3 = a) = -qa^2$$

$$M_g^{VIII}(x_7 = 2a) = 2qa^2$$



Moment M_g^{III} miał zgodnie z konwencją znaków zwrot przeciwny niż na rysunku, ale też znak ujemny. Zmiana zwrotu i znaku jednocześnie nie wprowadza różnicy, ale graficznie dobrze pokazuje znoszące się w punkcie E momenty gnące.

Sprawdźcie Państwo punkt D. Trzeba będzie dopisać rozdział VIII jako przedłużenie III.