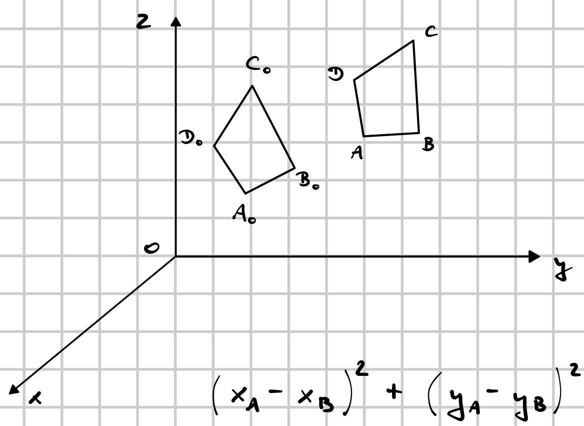
RUCH CIAŁA SZTYWNEGO

- ruch ciała sztywnego można opisać w przestrzeni przez równanie ruchu 3 punktów tego ciała, które nie leżą na wspólnej prostej



3 dowolne A, B, C punkty mają współrzędne

x_A, y_A, z_A $\quad$ x_B, y_B, z_B $\quad$ x_C, y_C, z_C

$$\left.\begin{aligned}
(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 &= r_{AB}^2 \\
(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 &= r_{AC}^2 \\
(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 &= r_{BC}^2
\end{aligned}\right\}$$

9 współrzędnych połączonych w 3 równania, zatem tylko 6 współrzędnych jest dowolnych a 3 wynikają z zależności

↳ **6 STOPNI SWOBODY CIAŁA SZTYWNEGO**

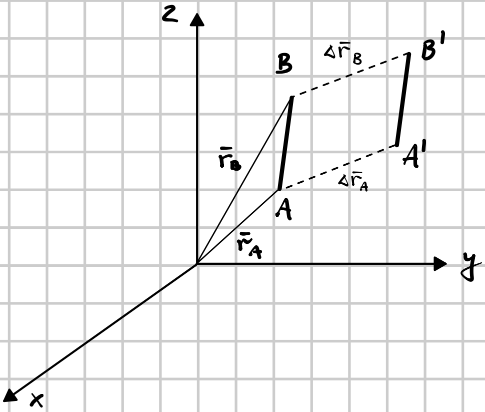
r_{AB}^2, r_{AC}^2, r_{BC}^2 – odległości między punktami A-B, A-C, B-C czyli długości odcinków $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$

Ciało sztywne można unieruchomić:

- w 1 punkcie: możliwość obrotu wokół nieruchomego punktu
  3 stopnie swobody obrotowe
- w 2 punktach: jeśli przez 2 punkty przepuścimy prostą to utworzy ona oś obrotu
  1 stopień swobody
- w 3 i więcej punktach: unieruchomienie

STOPIEŃ SWOBODY – możliwość wykonania niezależnego ruchu

PRĘDKOŚĆ PUNKTÓW CIAŁA SZTYWNEGO



ciało $AB \rightarrow A'B'$ przemieściło się w ruchu postępowym

prędkości wszystkich punktów ciała sztywnego w ruchu postępowym są równe

$$\Delta\bar{r}_A = \Delta\bar{r}_B \qquad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$$v_A = \frac{\Delta\bar{r}_A}{\Delta t} = \frac{dr_A}{dt}$$

$$v_B = \frac{\Delta\bar{r}_B}{dt} = \frac{dr_B}{dt} \qquad v_A = v_B = v$$

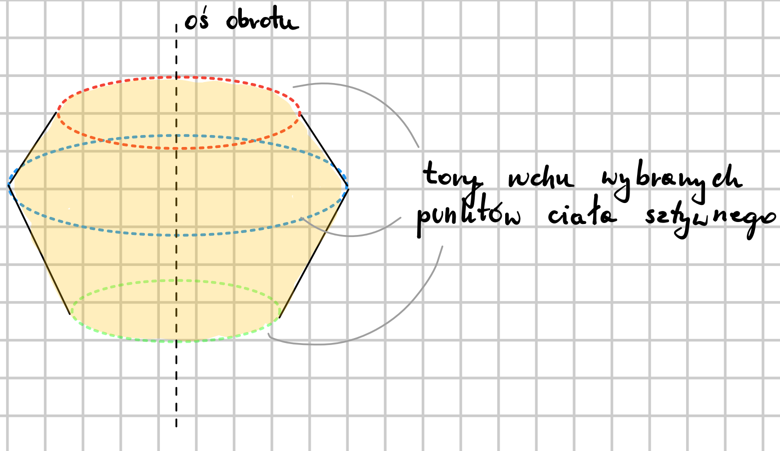
$$a_A = \frac{dv_A}{dt}$$

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} \qquad a_A = a_B = a$$

WEKTORY { PRĘDKOŚCI / PRZYSPIESZEŃ } PUNKTÓW CIAŁA SZTYWNEGO W RUCHU POSTĘPOWYM

SĄ RÓWNE I RÓWNOLEGŁE.

RUCH OBROTOWY CIAŁA SZTYWNEGO



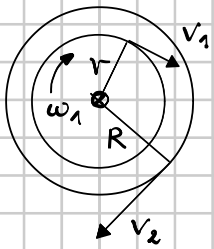
Parametrem ruchu obrotowego jest KĄT OBROTU φ CIAŁA WOKÓŁ OSI

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad \text{prędkość kątowa} \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon \quad \text{przyspieszenie kątowe}$$

$$[s^{-1}] \qquad\qquad [s^{-2}]$$

Prędkość liniowa w ruchu obrotowym

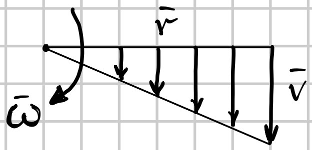
$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

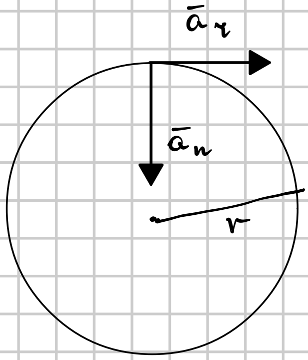


$$v_1 = \omega_1 \cdot r \qquad \omega_1 = \frac{v_1}{r}$$

$$v_2 = \omega_1 R \qquad v_2 = \frac{v_1}{r} \cdot R = \frac{R}{r} \cdot v_1$$

$$v_2 > v_1$$





$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \varepsilon r$$

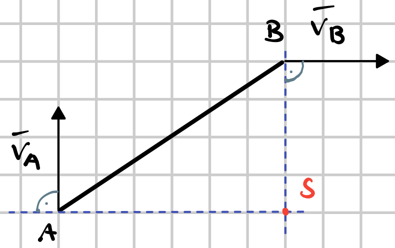
CHWILOWY ŚRODEK OBROTU

W ruchu krzywoliniowym ciała sztywnego można zawsze odnaleźć punkt, wokół którego w danej chwili czasu obraca się każdy punkt ciała sztywnego.

Wyobraźmy sobie rzut oszczepem, jeśli będziemy widzieli cały rzut z dalszej perspektywy z boku w kolejnych chwilach czasu

jeśli wyobrazimy sobie że ruch oszczepu obserwujemy w oknie to w kolejnych chwilach czasu będziemy widzieli obrót oszczepu

Aby znaleźć chwilowy środek obrotu przydatna jest znajomość prędkości liniowych dwóch punktów należących do ciała sztywnego.



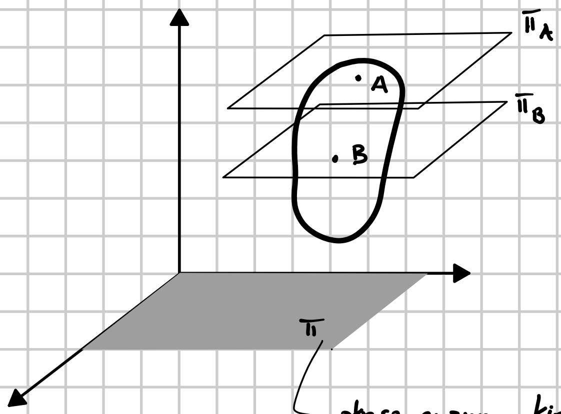
geometryczne wyznaczenie chwilowego środka obrotu jest możliwe poprzez znalezienie punktu leżącego na przecięciu prostych prostopadłych do wektorów prędkości, przechodzących przez punkty uczepienia

S - chwilowy środek obrotu

Odnalezienie chwilowego środka obrotu pozwala wyznaczyć prędkość liniową każdego innego punktu ciała sztywnego. Jeśli znany jest chwilowy środek obrotu tzn. że prędkość kątowa każdego punktu jest taka sama a prędkość liniowa zależy tylko od odległości punktu od chwilowego środka obrotu. Wektor prędkości liniowej jest prostopadły do ramienia.

Jeżeli nie można wykreślić chwilowego środka obrotu - wektory prędkości są równoległe to mamy ruch postępowy.

RUCH PŁASKI CIAŁA SZTYWNEGO

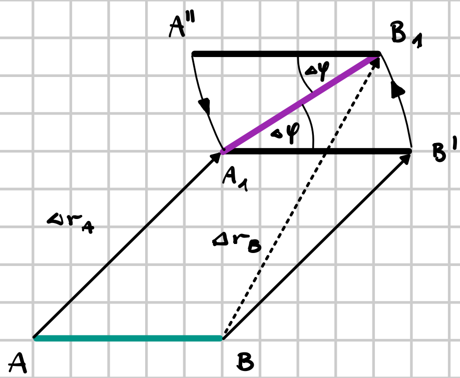


płaszczyzny równoległe do płaszczyzny kierującej

w ramach bryły wyróżnimy dwa punkty, które będą się poruszać w swoich płaszczyznach Π_A i Π_B

płaszczyzna kierująca

Ruch płaski ciała sztywnego możemy rozpatrywać jako ruch figury płaskiej poruszającej się w swojej płaszczyźnie



$$AB \xrightarrow{\Delta t} A_1 B_1$$

Dwa scenariusze ruchu:

1) • przesunięcie równoległe o Δr_A

$AB \longrightarrow A_1 B'$

• obrót o kąt $\Delta\varphi$

$A_1 B' \longrightarrow A_1 B_1$

2) • przesunięcie równoległe o Δr_B

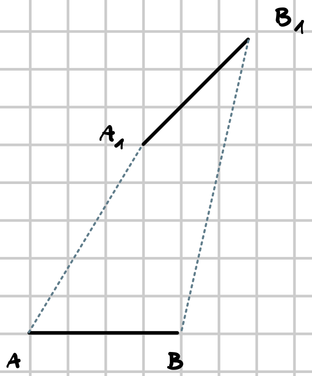
$AB \longrightarrow A'' B_1$

• obrót o kąt $\Delta\varphi$

$A'' B_1 \longrightarrow A_1 B_1$

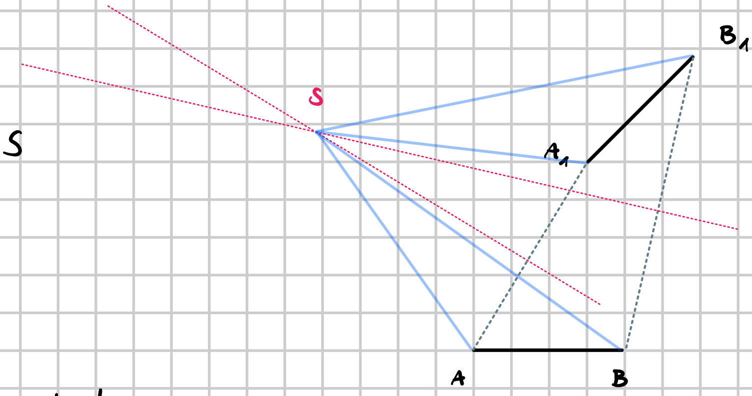
Dowolne przemieszczenie figury płaskiej w jej płaszczyźnie może być dokonane za pomocą przesunięcia równoległego, równego przesunięciu dowolnie obranego punktu A tej figury, oraz obrotu wokół tego punktu. Kąt obrotu nie zależy przy tym od wyboru punktu A.

Dowolne przemieszczenie figury płaskiej w jej płaszczyźnie może być dokonane za pomocą samego tylko obrotu wokół pewnego punktu.



1) tworzymy odcinki AA_1 i BB_1

2) tworzymy symetralne tych odcinków i szukamy punktu ich przecięcia



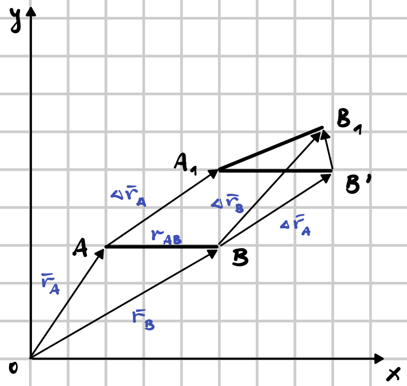
$\triangle ABS$ i $\triangle A_1B_1S$ są przystające

$\overline{AS} = \overline{A_1S}$

$\overline{BS} = \overline{B_1S}$

W punkcie S ma środek obrotu

RUCH PŁASKI - ruch złożony z ruchu postępowego i z ruchu obrotowego



chwilowe położenie punktów A i B w chwili t określa się ze pomocą wektorów $\bar r_A$ i $\bar r_B$

w chwili $t_1 = t + \Delta t$ punkty przemieszczą się w położenie A_1, B_1

$$\Delta \bar r_B = \overline{BB_1} = \overline{BB'} + \overline{B'B_1} = \Delta \bar r_A + \overline{B'B_1}$$

$$\underbrace{\frac{\Delta \bar r_B}{\Delta t}}_{v_B} = \underbrace{\frac{\Delta \bar r_A}{\Delta t}}_{v_A} + \underbrace{\frac{\Delta \Theta}{\Delta t}}_{\omega} \times \bar r_{AB}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar r_A}{\Delta t} = \bar v_A \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar r_B}{\Delta t} = \bar v_B$$

Prędkość punktu B równa się sumie wektorowej prędkości punktu A i prędkości punktu B wokół punktu A.

$$\bar v_B = \bar v_A + \bar \omega \times \bar r_{AB}$$

$\overline{AB} = \overline{A_1B'} = \bar r_{AB}$

$\overline{B'B_1} = \Delta \Theta \times \bar r_{AB}$

$\Delta \bar r_B = \overline{BB_1}$

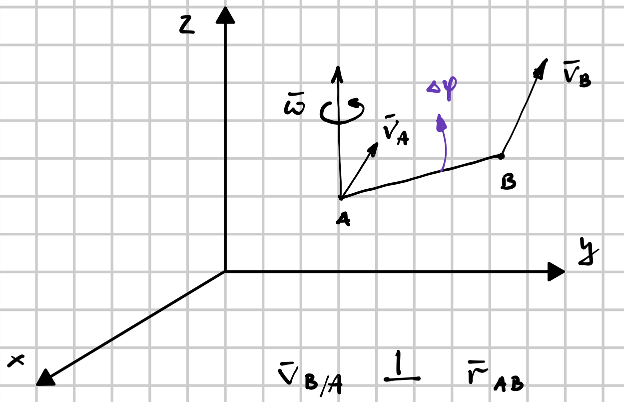
$\Delta \bar r_B = \bar r_A + \Delta \Theta \times \bar r_{AB} \quad / \Delta t$

$$\underbrace{\frac{\Delta \bar r_B}{\Delta t}}_{v_B} = \underbrace{\frac{\bar r_A}{\Delta t}}_{v_A} + \underbrace{\frac{\Delta \Theta}{\Delta t}}_{\omega} \times \bar r_{AB}$$

$$\lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta \bar{r}_A}{\Delta t} = \bar{v}_A \qquad\qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}_B}{\Delta t} = \bar{v}_B$$

Prędkość punktu B równa się sumie wektorowej prędkości punktu A i prędkości punktu B wokół punktu A.

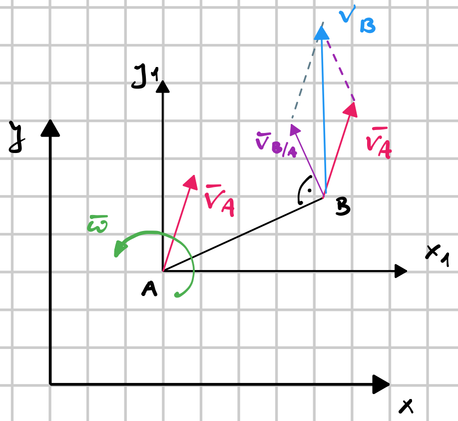
$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB} \qquad\qquad \bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A}$$



$\Delta\varphi > 0 \Rightarrow \bar{\omega}$ ma zwrot zgodny z osią OZ

$\Delta\varphi < 0 \Rightarrow \bar{\omega}$ ma zwrot przeciwny

$$\bar{v}_{B/A} \perp \bar{r}_{AB}$$



Prędkość dowolnego punktu B figury płaskiej, poruszającej się w swojej płaszczyźnie, równa się sumie geometrycznej prędkości dowolnie obranego punktu A tej figury, zwanego **biegunem**, oraz prędkości punktu B względem bieguna A, czyli prędkości punktu B w ruchu obrotowym wokół bieguna.

Prędkość kątowa tego ruchu obrotowego NIE ZALEŻY od wyboru bieguna A.

PRZYSPIESZENIA W RUCHU PŁASKIM

Wychodząc od prędkości $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A}$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB} \quad /: \Delta t$$

$$\frac{dv_B}{dt} = \frac{dv_A}{dt} + \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r}_{AB})}{dt} = \frac{dv_A}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r_{AB} + \omega \times \frac{dr_{AB}}{dt}$$

$$a_B = a_A + \varepsilon \times r_{AB} + \omega \times \frac{dr_{AB}}{dt}$$

$$a_B = a_A^n + a_A^\tau + \varepsilon r_{AB} + \omega^2 r_{AB}$$

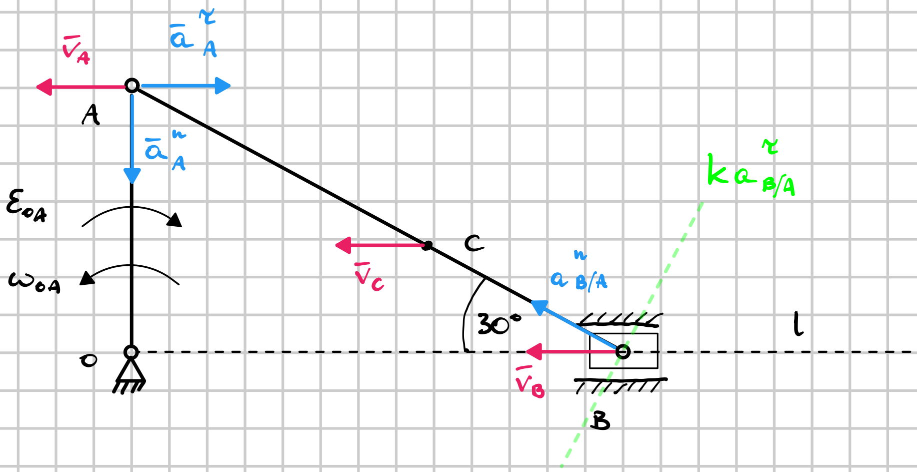
$$\bar{r}_{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A$$

$$\frac{dr_{AB}}{dt} = \frac{dr_B}{dt} - \frac{dr_A}{dt} = v_B - v_A = \underbrace{v_A + v_{B/A}}_{v_B} - v_A$$

$$\frac{dr_{AB}}{dt} = v_{B/A} = \omega \times r_{AB}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + a_{B/A}^n + a_{B/A}^\tau$$

$$a_B = \underbrace{a_A^n + a_A^\tau}_{a_A} + \underbrace{\varepsilon r}_{a_{B/A}^\tau} + \underbrace{\omega^2 r}_{a_{B/A}^n}$$



Dla przedstawionego mechanizmu korbowo-wodzikowego wyznaczymy prędkości i przyspieszenia punktów A, B i C.

$\overline{OA} = 35$ cm

$\overline{AC} = 45$ cm

$\omega_{OA} = 4\ s^{-1}$

$\varepsilon_{OA} = 8\ s^{-2}$

- w mechanizmie punkt A obraca się wokół punktu O, a punkt B przemieszcza się wzdłuż prostej poziomej l
- jeśli jednak obserwować ruch punktu B względem punktu A to zauważymy ruch obrotowy punktu B wokół A
- widzimy jak zachowa się punkt A w kolejnej chwili czasu, punkt B zostanie pociągnięty w lewo

- skoro punkt A obraca się wokół punktu O, to możemy wyznaczyć prędkość liniową V_A, która będzie prostopadła do ramienia OA a jej zwrot będzie powiązany z orientacją wektora ω_{OA}

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4\,s^{-1} \cdot 35cm = 140\ cm/s$$

- przyspieszenie punktu A: a^n_A i a^τ_A wyznaczymy z ogólnych zależności

$$a^n_A = \omega^2_{OA} \cdot OA = (4s^{-1})^2 \cdot 35\,cm = 560\ cm/s^2$$

$$a^\tau_A = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 8\,s^{-2} \cdot 35cm = 280\ cm/s^2$$

mamy możliwość wyznaczenia przyspieszenia całkowitego punktu A – a_A

$$\bar{a}_A = \bar{a}^n_A + \bar{a}^\tau_A$$

$$a_A = \sqrt{(a^n_A)^2 + (a^\tau_A)^2}$$

- skoro punkt B obraca się wokół punktu A, to możemy wyznaczyć kierunki przyspieszeń $a^n_{B/A}$ i $a^\tau_{B/A}$

oraz z całą pewnością zwrot $\bar{a}^n_{B/A}$ – do punktu A

- gdybyśmy chcieli poszukiwać chwilowego środka obrotu, to zauważymy, że dla danej chwili czasu prędkości $\bar{V}_A$ i $\bar{V}_B$ są równoległe – to wyklucza znalezienie chwilowego środka obrotu – skoro tak, to istnieje tylko ruch postępowy a wszystkie punkty ciała A-B poruszają się w ramach ruchu postępowego z prędkością równą V_A

$$V_A = V_B = V_C$$

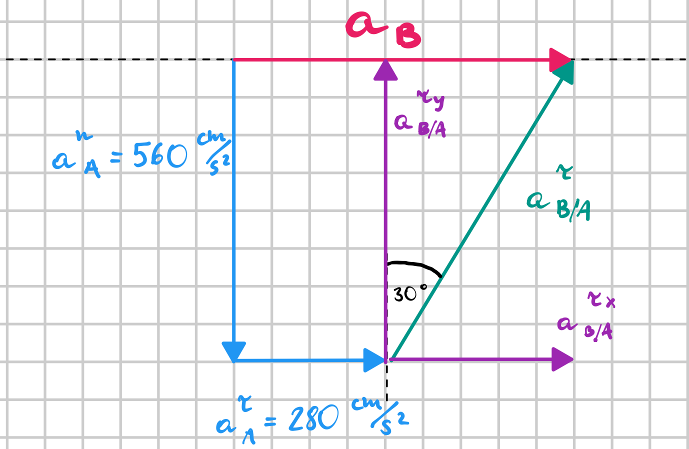
- przyspieszenie normalne $a^n_{B/A} = \omega^2_{AB} \cdot AB$, ale skoro pręt AB w tej chwili czasu porusza się ruchem postępowym, to prędkość kątowa w ruchu obrotowym jest zerowa (z tej prostej przyczyny, że nie ma obrotu)

$$\omega_{AB} = 0 \Rightarrow a^n_{B/A} = \omega^2_{AB} \cdot AB = 0$$

- przyspieszenie styczne $a^\tau_{B/A}$ ma kierunek prostopadły do kierunku przyspieszenia $a^n_{B/A}$

- przyspieszenie całkowite punktu B, ze względu na jego możliwość ruchu (tylko w poziomie) leży na kierunku poziomym

• w celu wyznaczenia przyspieszenia punktu B posłużymy się metodą graficzną



kierunek przyspieszenia całkowitego punktu B

jeśli przyspieszenie $a^{\tau}_{B/A}$ rozłożymy na kierunki to obliczymy jego składową $a^{\tau y}_{B/A}$ a następnie $a^{\tau x}_{B/A}$

$$-a^{n}_{A} + a^{\tau y}_{B/A} = 0$$

przyspieszenie $a^{\tau y}_{B/A}$ ma wartość taką by powrócić na kierunek przyspieszenia a_B

$$a^{\tau}_{A} + a^{\tau x}_{By} = a_B$$

przyspieszenie a_B równe jest sumie wszystkich przyspieszeń $\bar{a}^{n}_{A} + \bar{a}^{\tau}_{A} + \bar{a}^{\tau}_{B/A} = \bar{a}_B$ ale co do wartości jest równe $a^{\tau}_{A} + a^{\tau x}_{B/A} = a_B$

$$a^{\tau y}_{B/A} = a^{n}_{A} = 560\ cm/s^2$$

$$\frac{a^{\tau y}_{B/A}}{a^{\tau}_{B/A}} = \sin 60°$$

$$\frac{a^{n}_{A}}{a^{\tau}_{B/A}} = \sin 60°$$

$$a^{\tau}_{B/A} = \frac{a^{n}_{A}}{\sin 60°} = \frac{560}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 560 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1120\sqrt{3}}{3} \simeq 646{,}6\ cm/s^2$$

$$\frac{a^{\tau x}_{B/A}}{a^{\tau}_{B/A}} = \sin 30°$$

$$a^{\tau x}_{B/A} = \frac{1}{2} \cdot a^{\tau}_{B/A} \simeq 323{,}3\ cm/s^2$$

$$a_B = a^{\tau}_{A} + a^{\tau x}_{B/A} = 280 + 323{,}3 = 603{,}3\ cm/s^2$$

$$a^{\tau}_{B/A} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$$

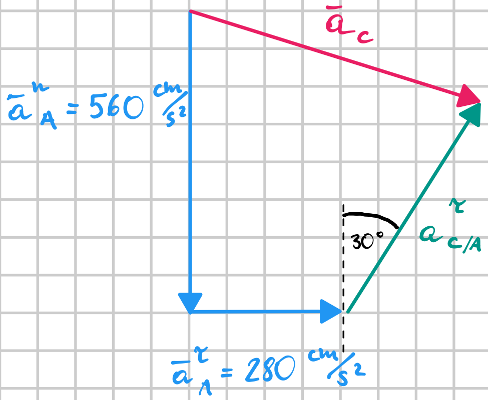
$$\varepsilon_{AB} = \frac{a^{\tau}_{B/A}}{AB} \simeq 9{,}23\ s^{-2}$$

w oparciu o znajomość $a^{\tau}_{B/A}$ możemy wyznaczyć przyspieszenie kątowe ε_{AB}, które jest stałe dla całego odcinka AB w tym dla punktu C

$$a^{\tau}_{C/A} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 9{,}23\,s^{-2} \cdot 45\,cm = 415{,}35\ cm/s^2$$

o ile kierunek przyspieszenia a_B był znany, bo wynikał z budowy mechanizmu,
o tyle kierunek przyspieszenia a_C pozostaje nieznany

$$\bar{a}_C = \bar{a}^{n}_{A} + \bar{a}^{\tau}_{A} + \bar{a}^{\tau}_{C/A}$$



kierunek przyspieszenia a_C wynika z wartości poszczególnych składowych