

Wykład 1 - [27.02.2020](#)

Mechanika - dział fizyki, który zajmuje się opisem oddziaływanie między ciałami, wpływem sił, warunkami ruchu i równowagi.

Mimo, że w przeszłości ludzie nie znali mechaniki nawet w drobnym stopniu, to obserwowane przez nas osiągnięcia architektoniczne i techniczne wskazują wyraźnie, że mechanikę z powodzeniem stosowano.



Podobnie możemy zaobserwować jak małe dziecko, nieznające nawet podstaw mechaniki, intuicyjnie stosuje pewne techniki - balans ciałem i łapanie równowagi, poszukiwanie środka ciężkości podczas budowy zamku z klocków, dopasowanie siły do spodziewanego efektu.



MECHANIKA



STATYKA

opisuje układy będące
w równowadze



KINEMATYKA

opisuje układy ciał
będące w ruchu, ale
nie uwzględnia sił,
które ten ruch wywołały



DYNAMIKA

dzieli się na STATYKĘ
i KINETYKĘ, ale ze
względów historycznych
STATYKA stanowi osobny
dział

Jeśli zatem spojrzeć na dokonania ludzkości w zakresie zdobywania
techniki i architektury, to można odnieść wrażenie, że mechanikę
rozwijamy od wielu tysięcy lat. Niemniej jednak najsilniejszy rozwój
tej dziedziny to okres ostatnich kilkuset lat.

Dla właściwego opisu przyszłych zagadnień musimy wprowadzić 4 parametry:

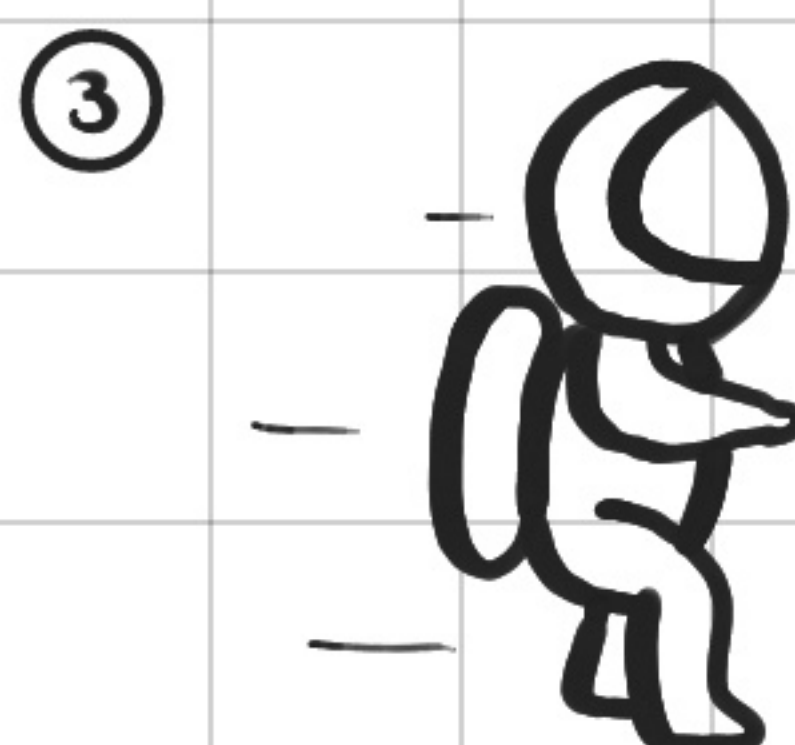
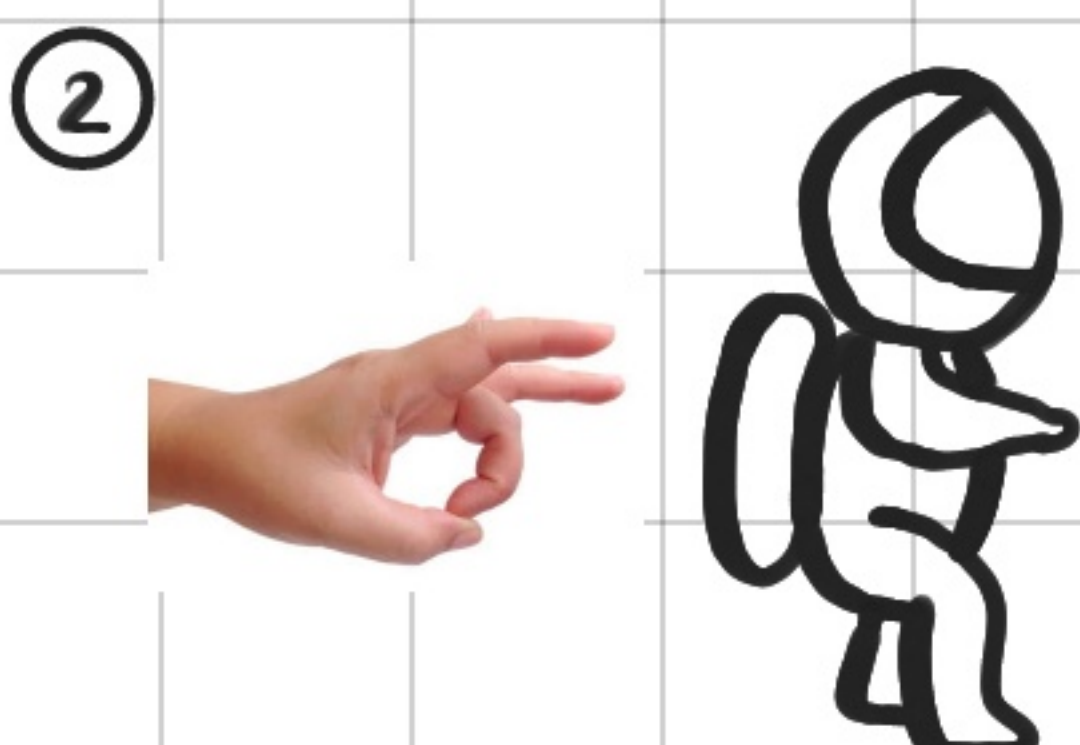
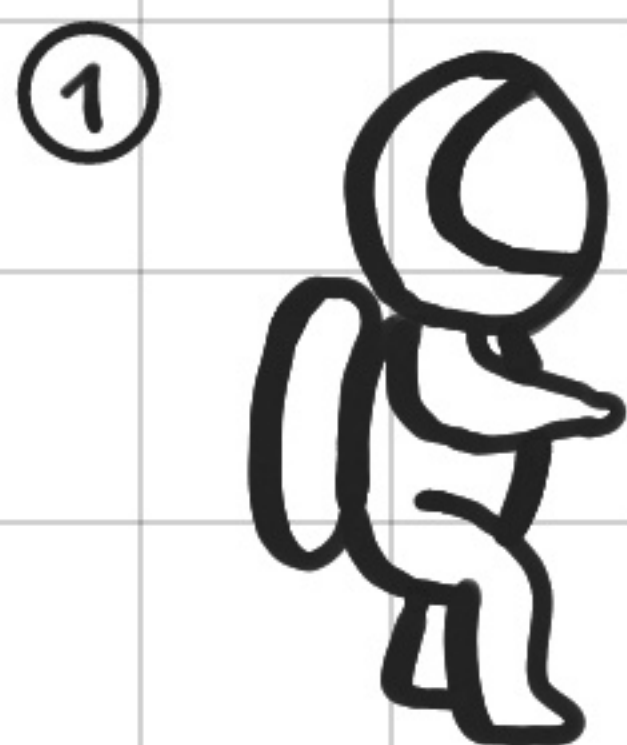
- **DŁUGOŚĆ** - pozwoli nam na opisanie wymiarów ciał, określić ich położenie i przemieszczenie w określonym układzie
- **CZAS** - czwarty wymiar, w obrębie statyki nieistotny, ale dla kinematyki i dynamiki ma kluczowe znaczenie
- **MASA** - miara ilości substancji a w związku z tym także bezwładności ciał; masa $\neq$ ciężar
- **SILA** - miara wzajemnego oddziaływania ciał, nie jest widoczna natomiast widać efekty jej działania

Dodatkowo wprowadzimy 3 koncepcyjne modele, które ułatwią nam rozumienie a na poziomie inżynierskim pozwolą z dobrym przybliżeniem analizować wybrane problemy.

- **PUNKT MATERIALNY** - nieskończenie mała cząstka (punkt) obdarzona masą
- **CIAŁO SZTYWNE** - układ punktów materialnych pomiędzy którymi relacje odległościowe nie ulegają zmianie niezależnie od stanu obciążenia
- **SILA SKUPIONA** - siła działająca w określonym punkcie konstrukcji w rzeczywistości siła skupiona w punkcie wywołataby nieskończenie wysokie naprężenia

PRAWA NEWTONA

1. Jeśli na ciało nie działają żadne siły lub też działające siły równoważą się, wówczas ciało to pozostaje w spoczynku albo porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.



2. Jeśli na ciało działają siły, to ciało to doznaje przyspieszenia które jest wprost proporcjonalne do działającej siły i odwrotnie proporcjonalne do masy ciała.

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}$$

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$$

$$\bar{F} = m \cdot a \left[\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

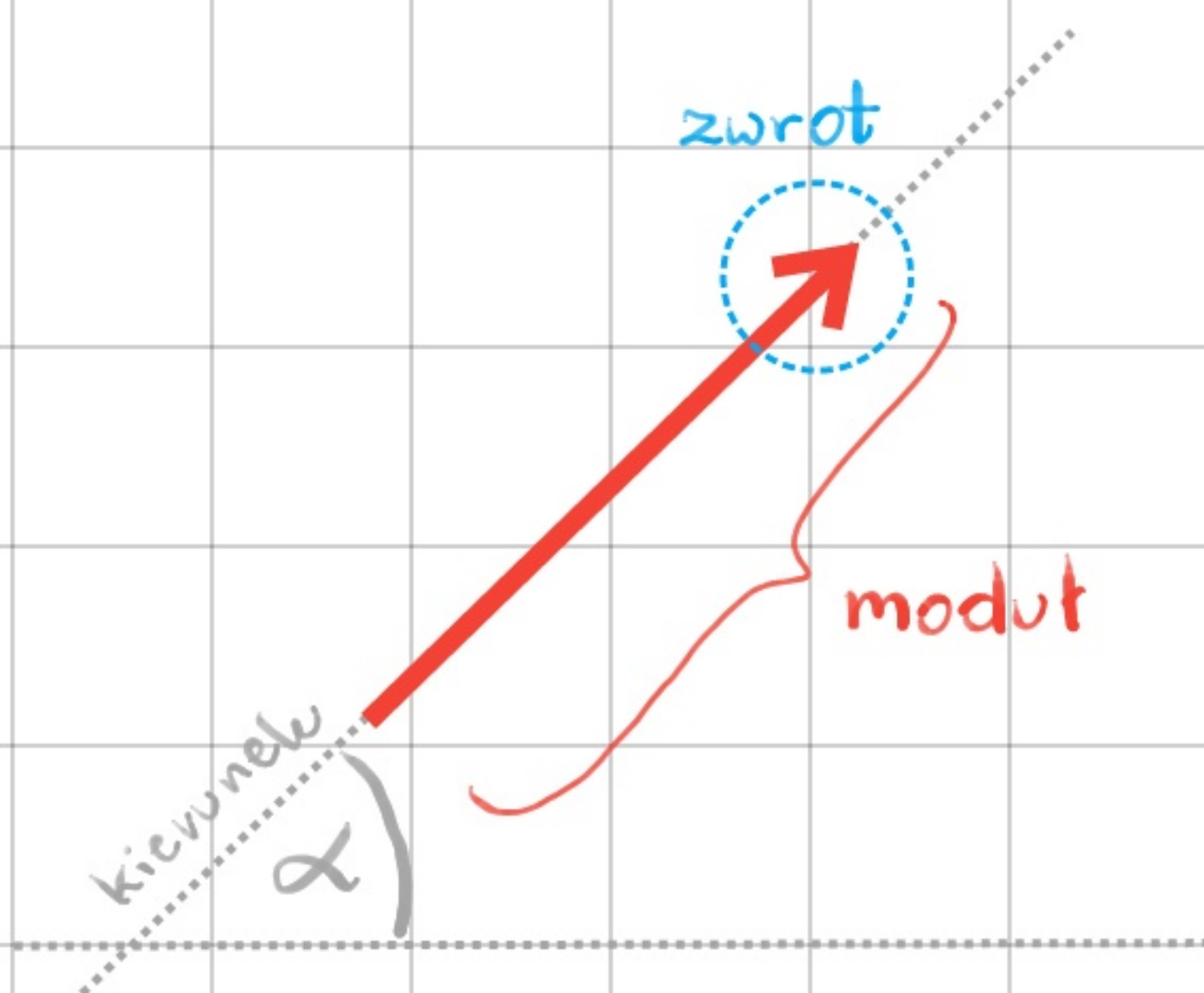
$$1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N (niuton)}$$

W ramach eksperymentu spróbujmy zadziałać określoną siłą na sklepowy wózek. Pchnijmy raz pusty wózek a raz pełny. Efekt ten możemy obserwować także podczas hamowania.



WEKTOR

- wielkości fizyczne, do opisanie której wymagane są 3 parametry
 - moduł (wartość)
 - kierunek
 - zwrot



Przykładowe wielkości wektorowe:

- siła $\vec{F}$
- prędkość $\vec{v}$
- przyspieszenie $\vec{a}$

SKALAR

- wielkości fizyczne, do opisanie której wystarczy 1 parametr
 - moduł (wartość)

Przykładowe wielkości skalarne:

- masa m
- czas t
- temperature T

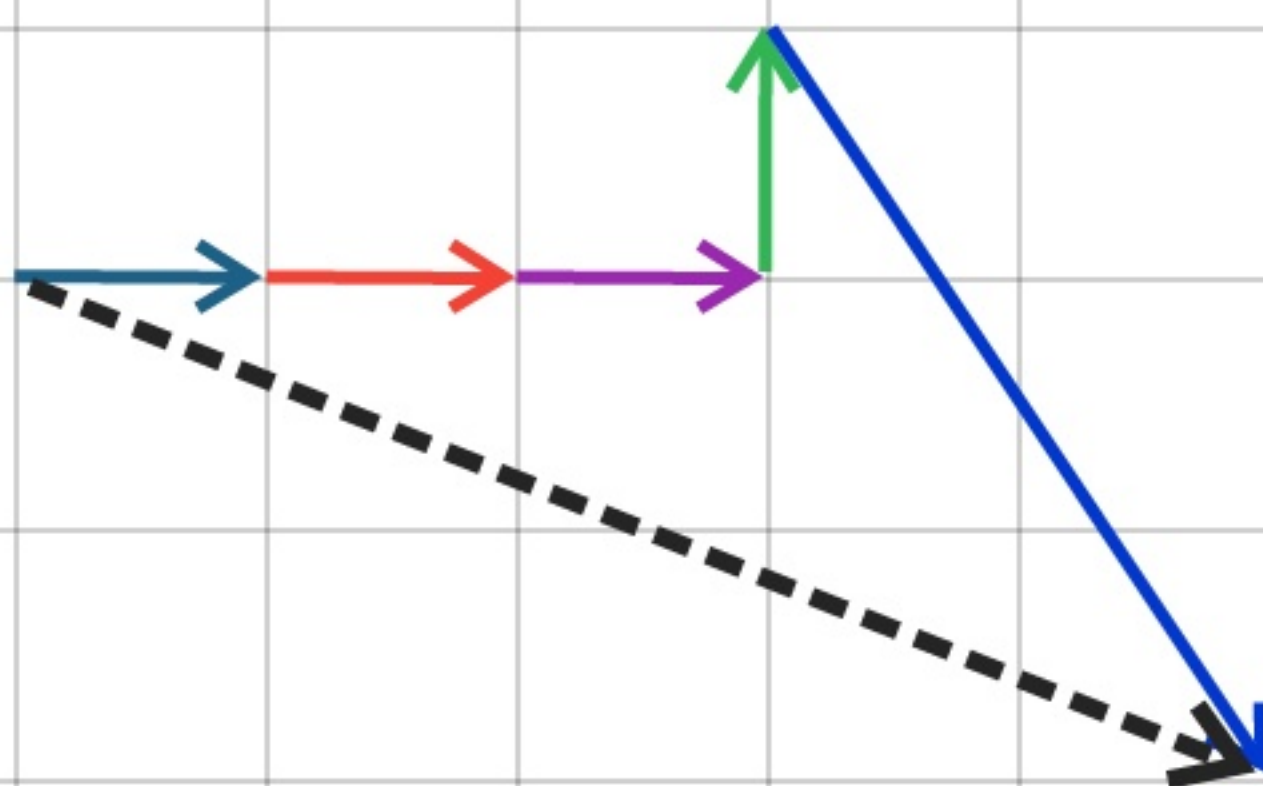
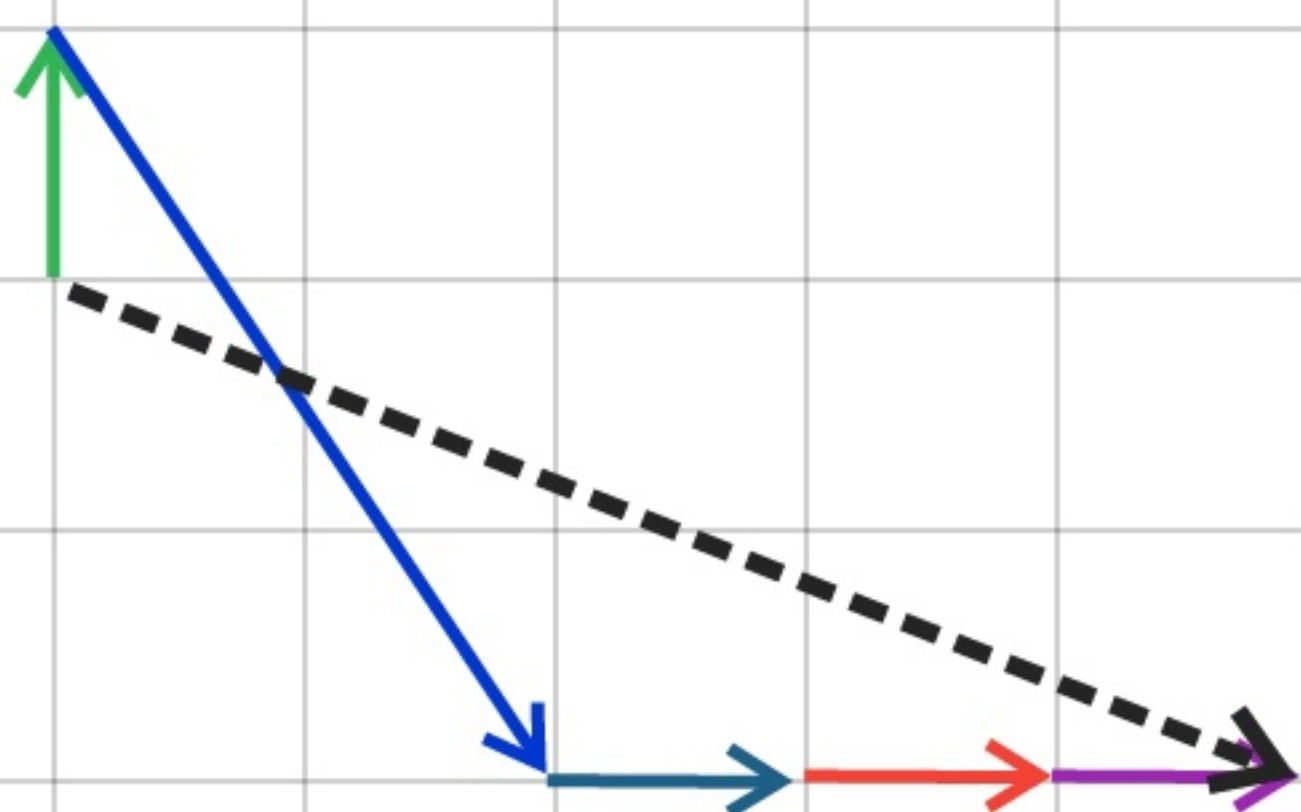
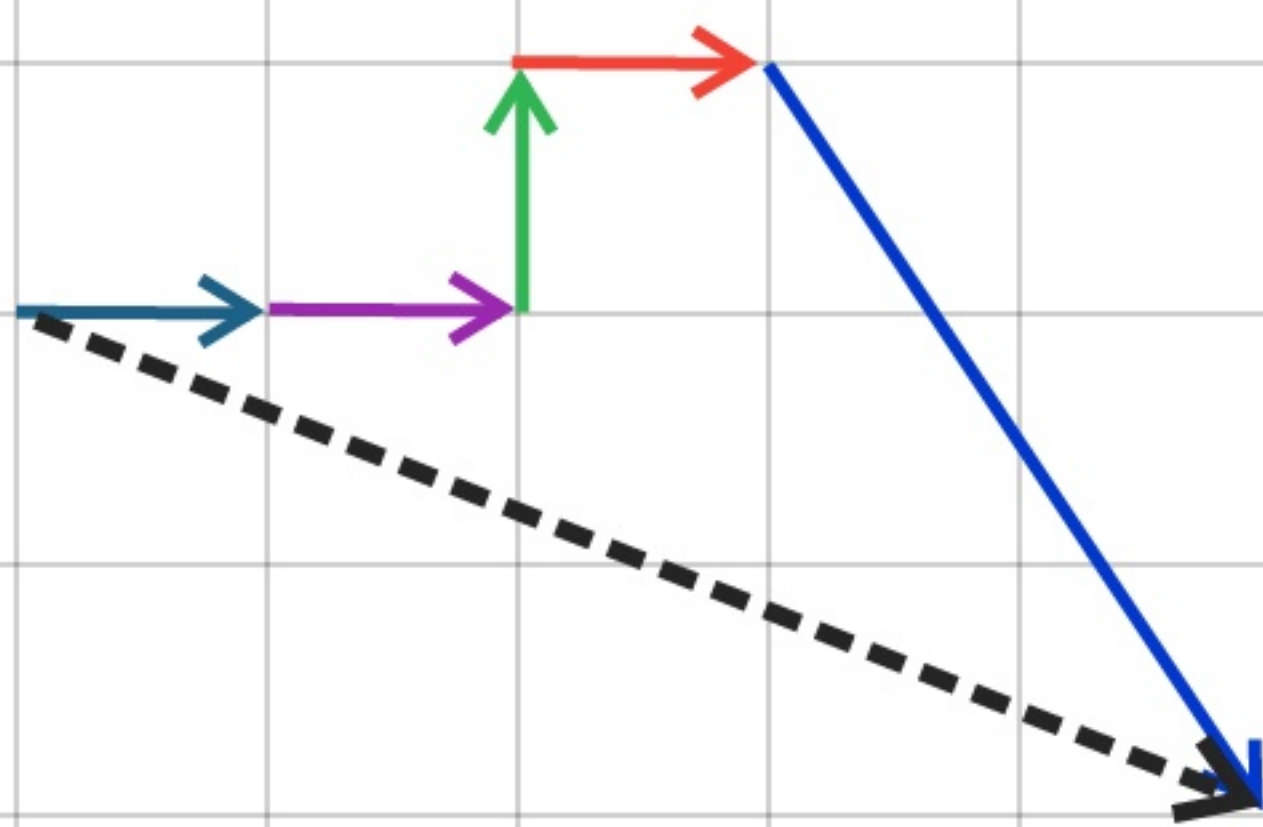
OPERACJE WEKTOROWE

- mnożenie przez wartość (czyli przez skalar)

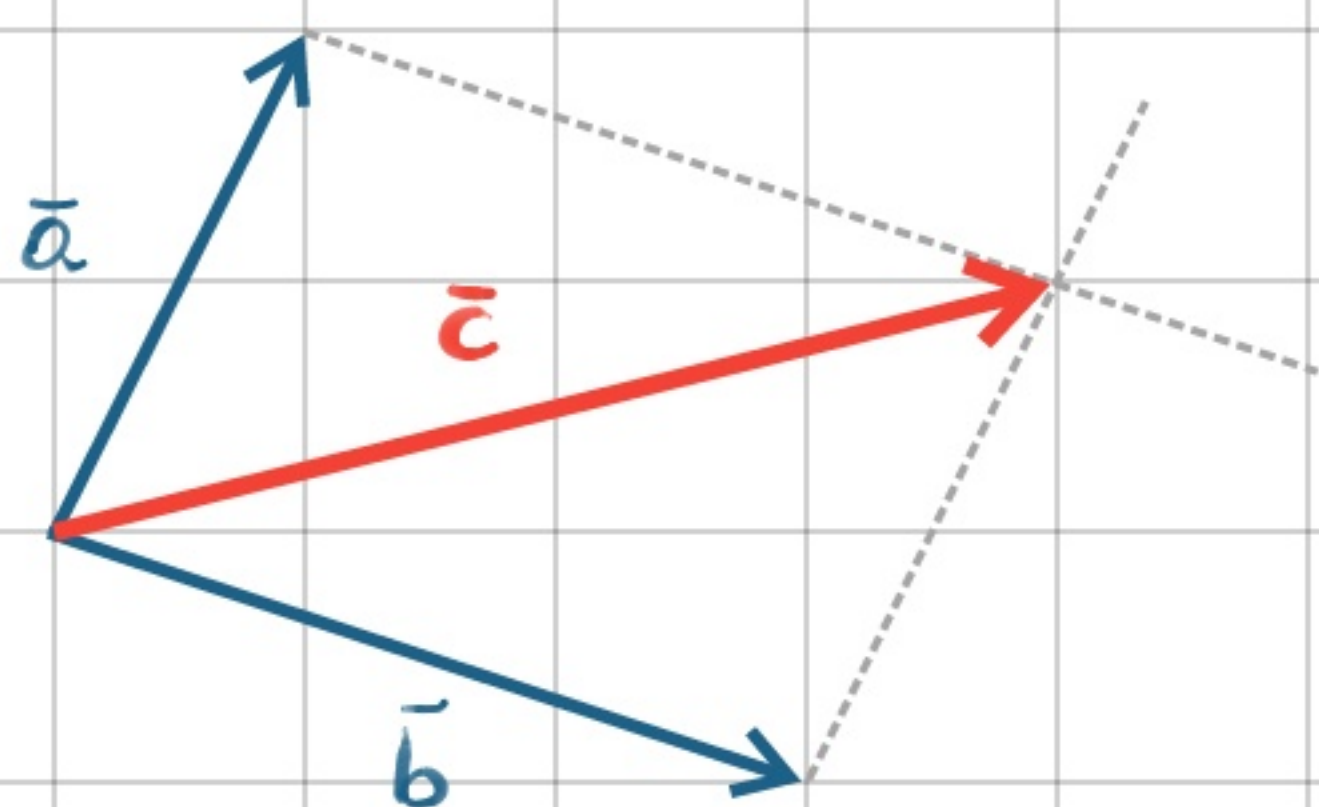


jeśli mnożymy przez wartość
ujemną, wówczas zmienia się
także zwrot wektora

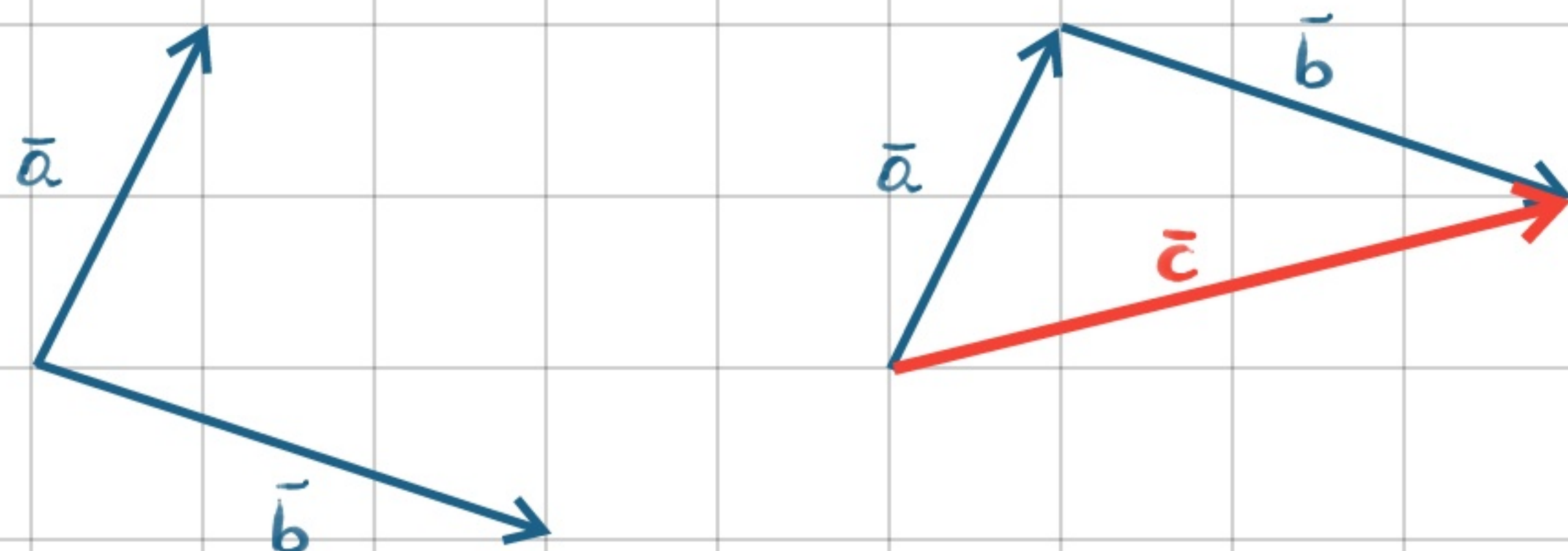
- dodawanie wektorów - jest przemienne, kolejność nie ma znaczenia



- dodawanie wektorów - metoda równoległoboku



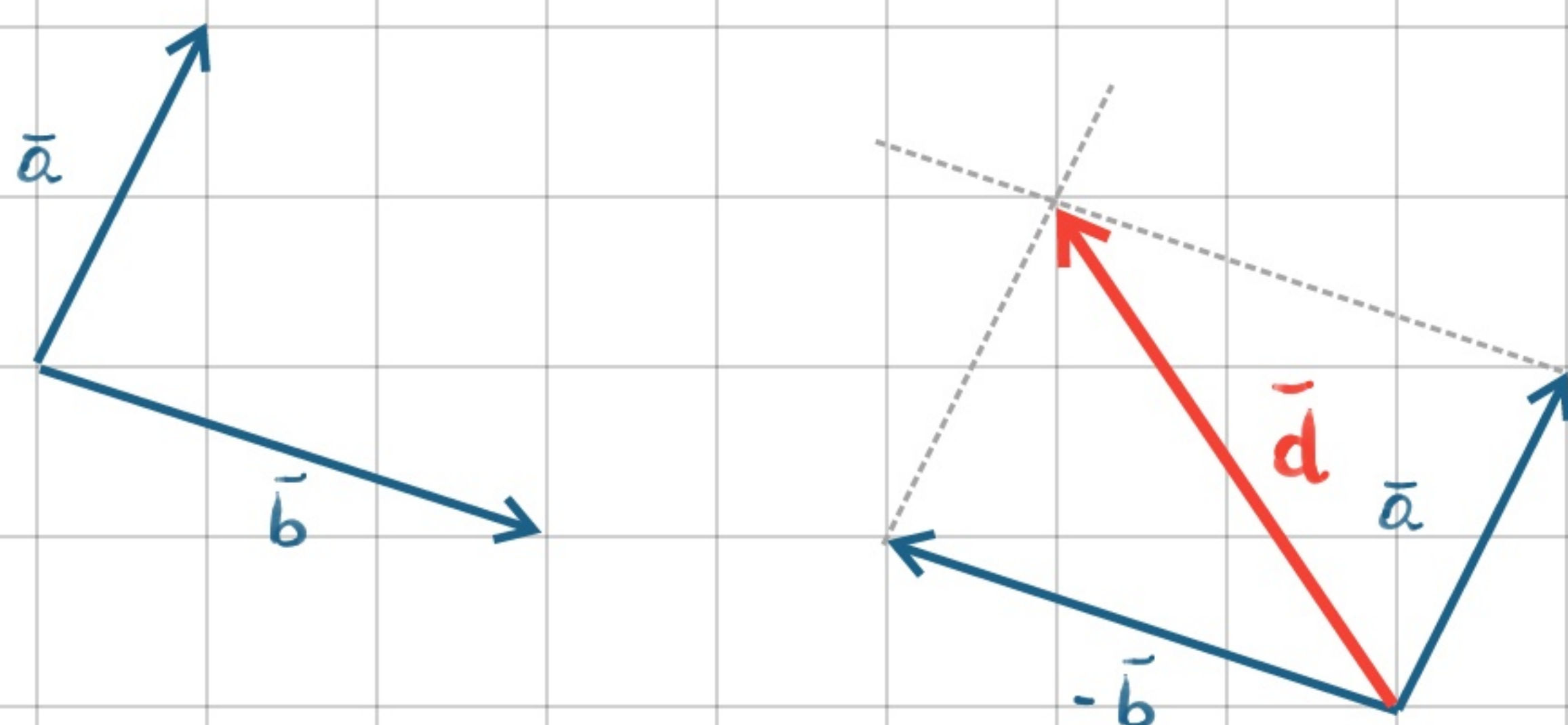
- dodawanie wektorów - metoda trójkąta



- odejmowanie wektorów

odejmowanie to dodawanie wektorów przeciwnych

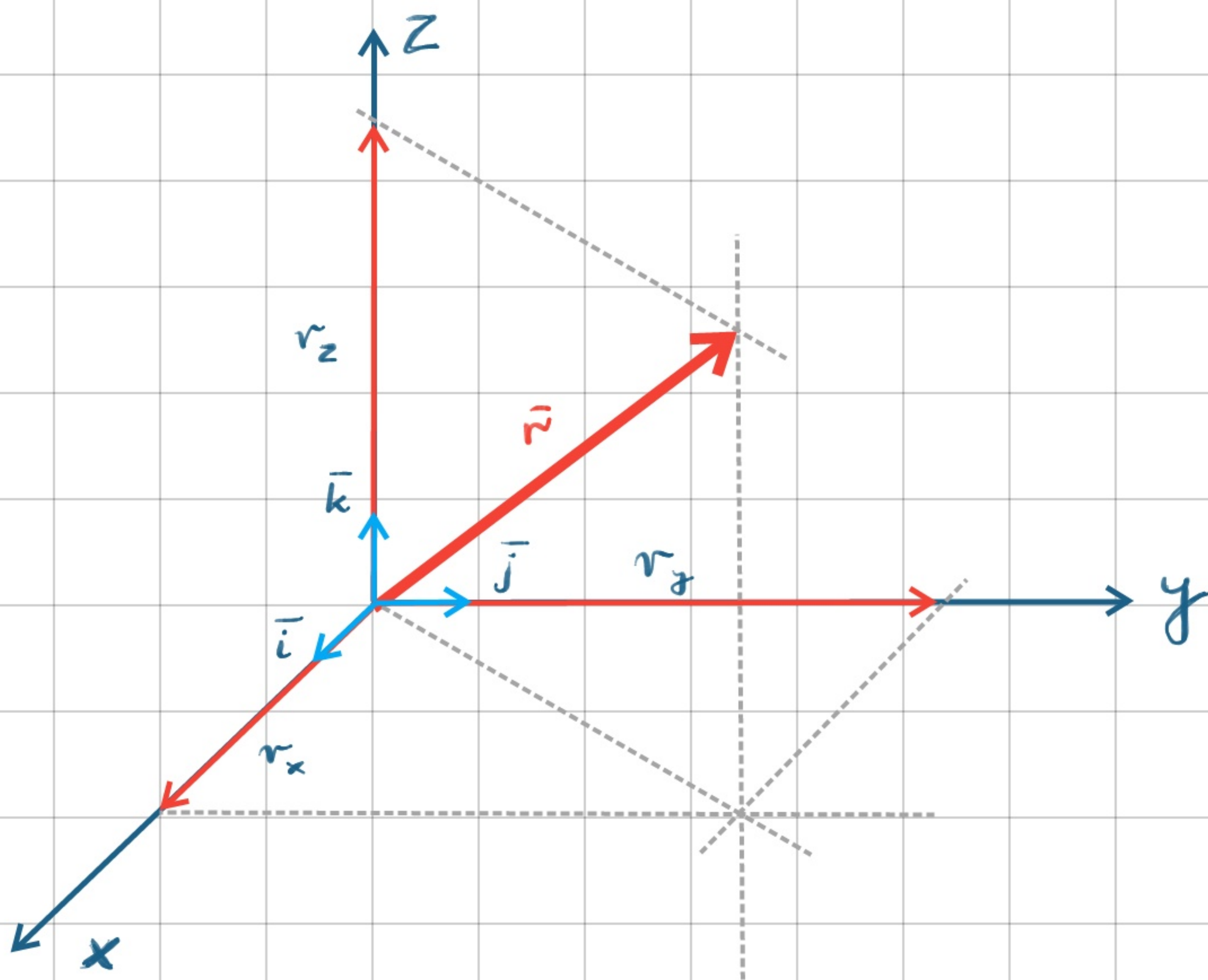
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{d}$$



Kwestię iloczynu wektorowego i skalarnego poruszamy po wprowadzeniu postaci analitycznej wektora.

POSTAĆ ANALITYCZNA WEKTORA

Jeżeli wyobrażamy sobie wektor w układzie kartezjańskim
prawoskrętnym



gdzie: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ to wersory czyli wektory
jednostkowe

$$\vec{a} = a_0 \vec{i}$$

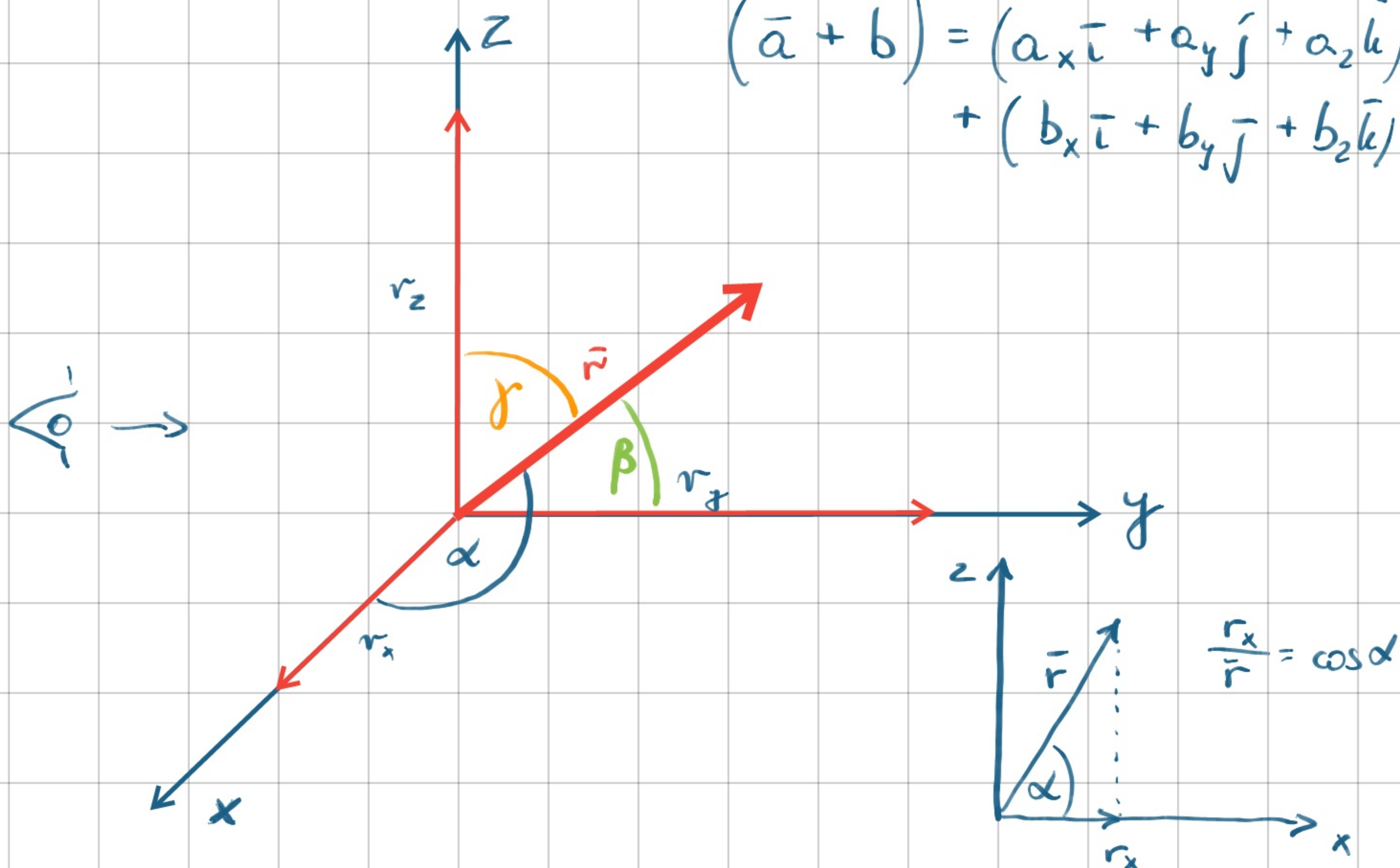
$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

gdzie r_x , r_y , r_z to współrzędne wektora

moduł wektora możemy wyznaczyć z zależności

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

$$(\bar{a} + \bar{b}) = (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) + (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k})$$



Kosinusy kątów α , β i γ to tzw. KOSINUSY KIERUNKOWE.

$$\frac{r_x}{r} = \cos \alpha$$

$$\frac{r_y}{r} = \cos \beta$$

$$\frac{r_z}{r} = \cos \gamma$$

Jeśli na kierunku wektora $\vec{r}$ stworzymy wektor $\bar{r}_0$ to możemy napisać:

$$\bar{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$$

wektor
moduł wektora

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{r}_0 & = & \frac{|\vec{r}|}{r} & = & \frac{r_x}{r} \vec{i} & + & \frac{r_y}{r} \vec{j} & + & \frac{r_z}{r} \vec{k} \\ \downarrow \text{wersor} & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & \cos \alpha & & \cos \beta & & \cos \gamma & & \end{array}$$

$$\vec{r}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

$$\vec{r}_{0x} = \cos \alpha \vec{i}$$

$$\vec{r}_{0y} = \cos \beta \vec{j}$$

$$\vec{r}_{0z} = \cos \gamma \vec{k}$$

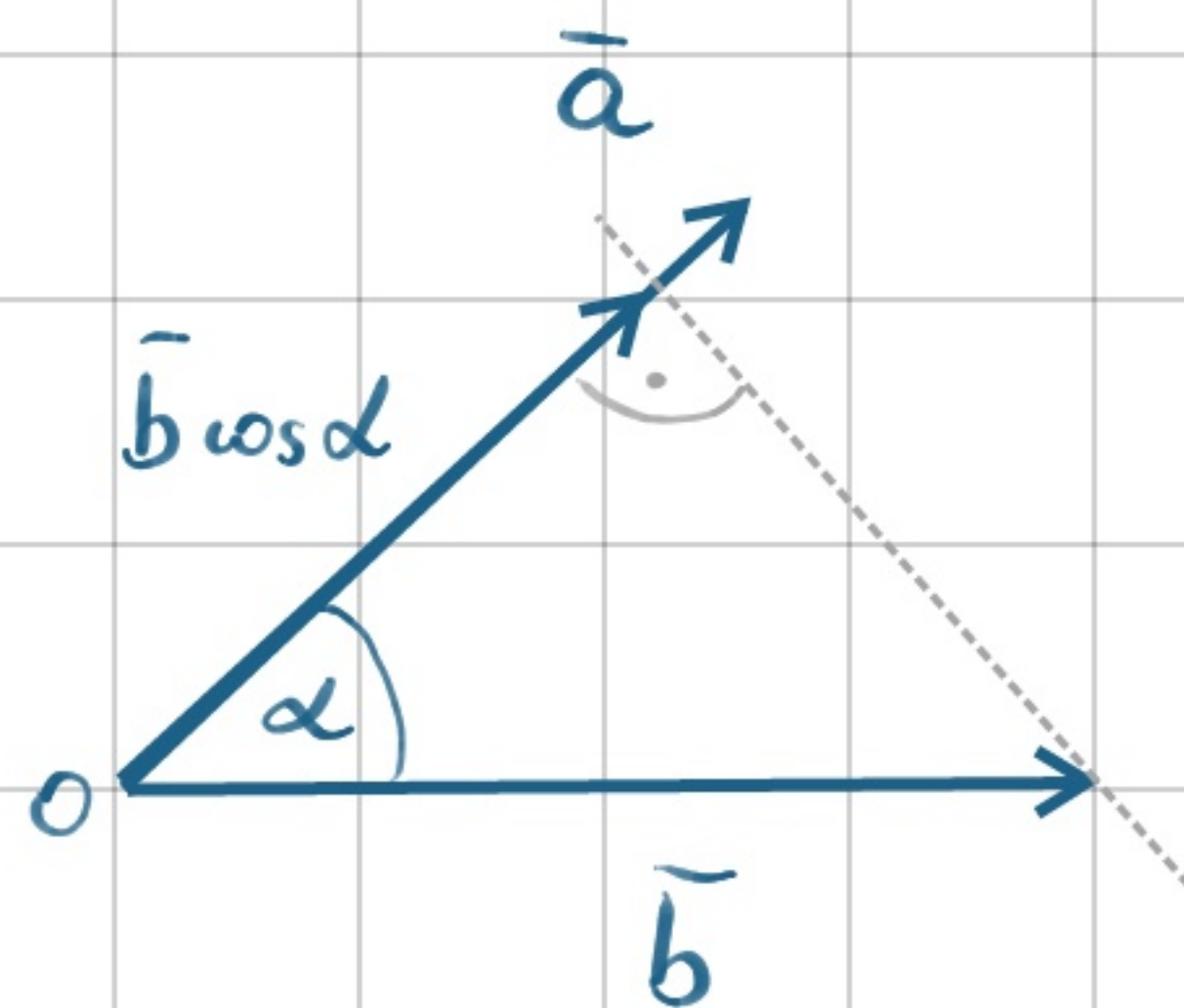
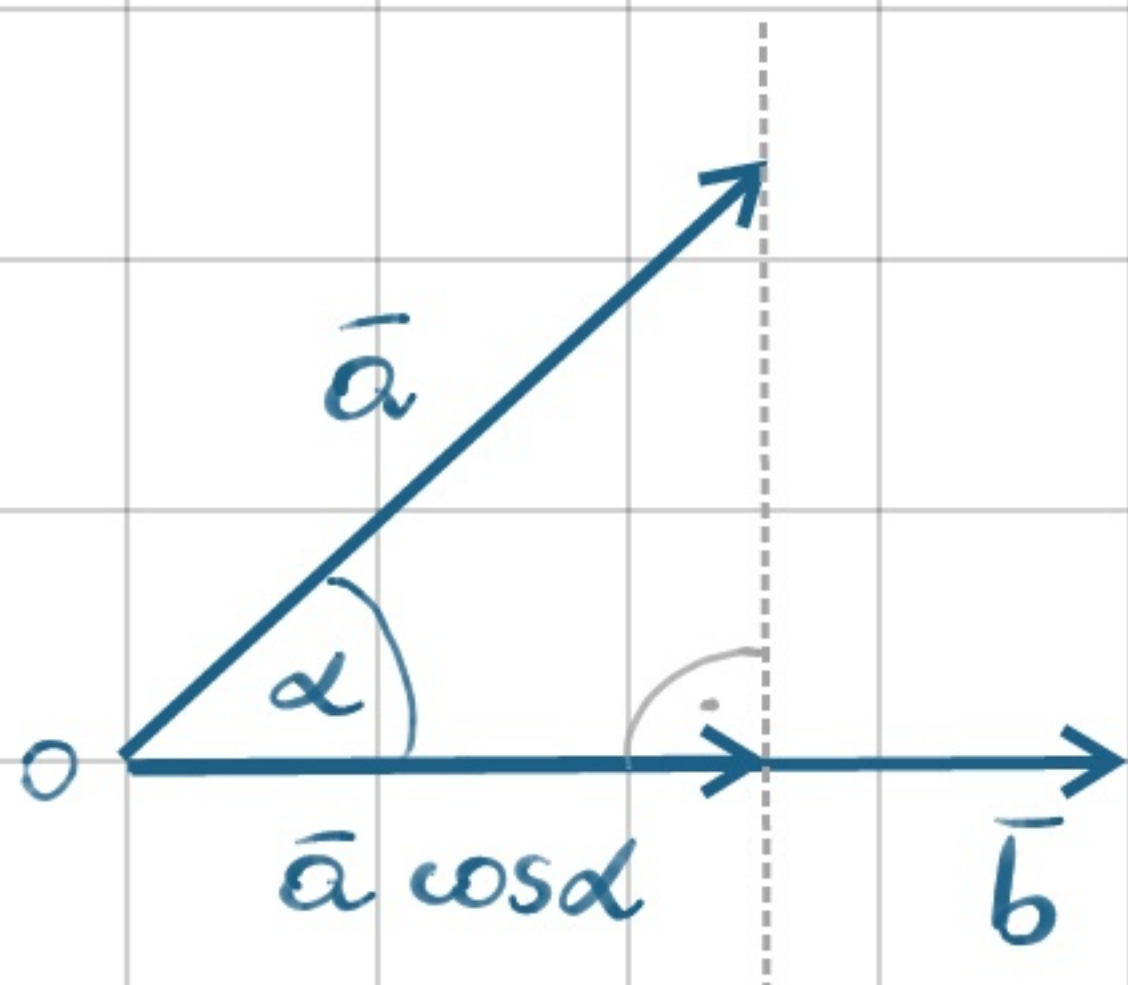
DODAWANIE ANALITYCZNE

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} \end{aligned}$$

MNOŻENIE WEKTORÓW ANALITYCZNE

• iloczyn skalarny - to także skalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{\text{def.}}{=} |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$



Iloczyn skalarny:

- jest przemienny: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (jest tylko skalar)

- jest rozdzielny: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

- jest łączny przy mnożeniu przez liczbę:

$$m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b})$$

- wektorów równoległych

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \quad \text{dla zgodnych zwrotów}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -ab \quad \text{dla przeciwnych zwrotów}$$

- wektorów prostopadłych

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

- wersorów

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

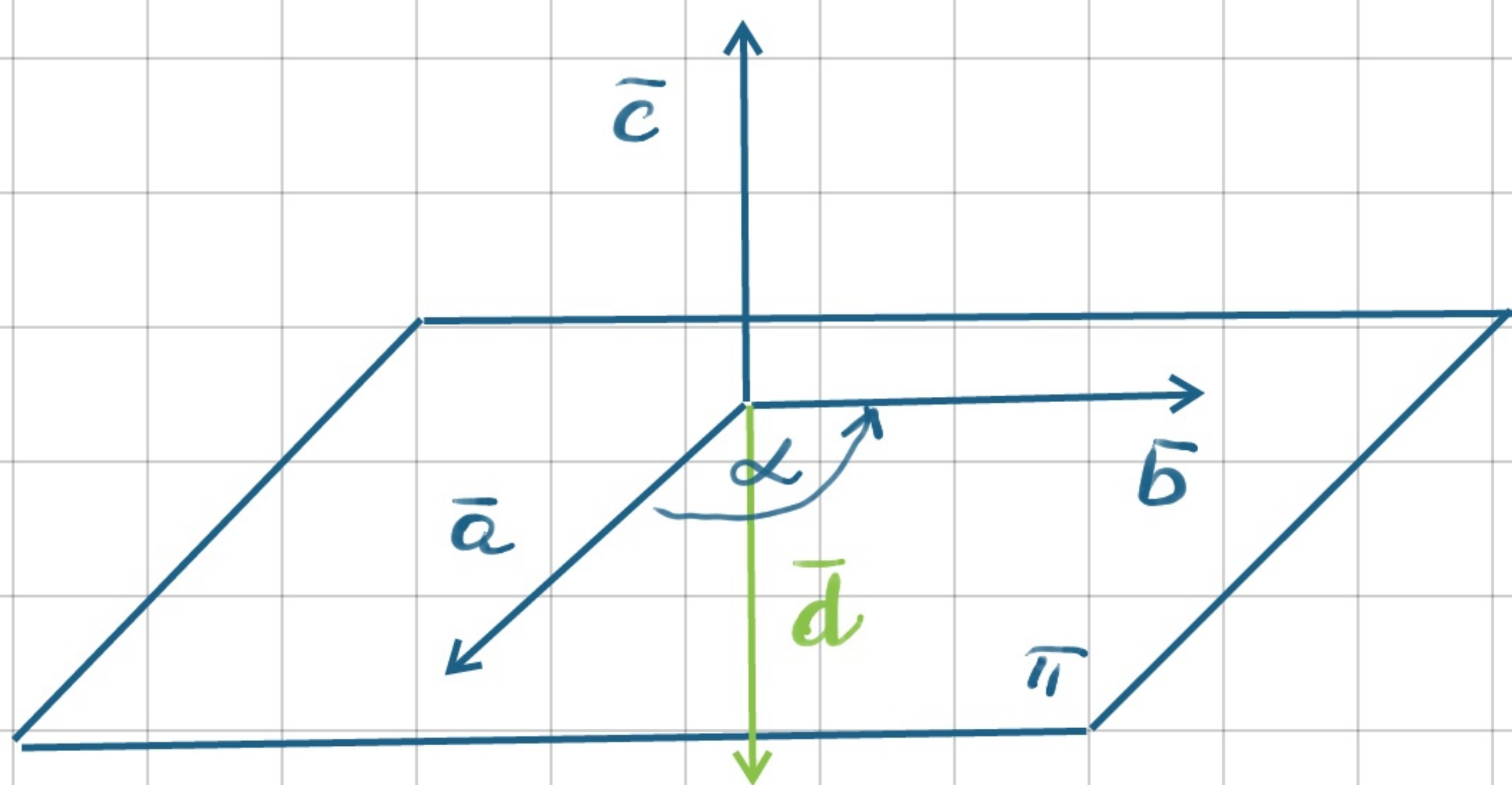
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

• iloczyn wektorowy - wynikiem jest wektor

$$\vec{a} \times \vec{b} \stackrel{\text{def.}}{=} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

iloczyn wektorowy daje w rezultacie wektor, który jest prostopadły do płaszczyzny tworzonej przez wektory składowe, którego zwrot określamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej



$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{d} = -\vec{c}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \vec{d}$$

iloczyn wektorowy

- spełnia prawo rozdzielności

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$$

$$\bar{c} \times (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{c} \times \bar{a} + \bar{c} \times \bar{b}$$

- nie spełnia prawa przemienności

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$$

- mnoży się przez skalar

$$m(\bar{a} \times \bar{b}) = (m\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (m\bar{b})$$

$$\bar{a} \parallel \bar{b}$$

$$\sin(\bar{a}, \bar{b}) = 0$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = 0$$

$$\bar{a} = \bar{b}$$

$$\sin(\bar{a}, \bar{b}) = 0$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = 0$$

$$\bar{a} \perp \bar{b}$$

$$\sin(\bar{a}, \bar{b}) = 1$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = ab(\bar{a}^\circ \times \bar{b}^\circ)$$

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = ab$$

- iloczyn wektorowy wersorów

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0$$

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$$

$$\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$$

$$\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$$

$$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$$

$$\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$$

$$\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$$

SILA, WEKTOR GŁÓWNY, MOMENT GŁÓWNY

Sila - to wielkość fizyczna opisująca relacje między obiektami fizycznymi, siła jako taka jest niewidoczna, ale rozpoznajemy skutki jej działania

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

siła działająca na ciało jest wprost proporcjonalna do iloczynu jego masy i działającego przyspieszenia

$$1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

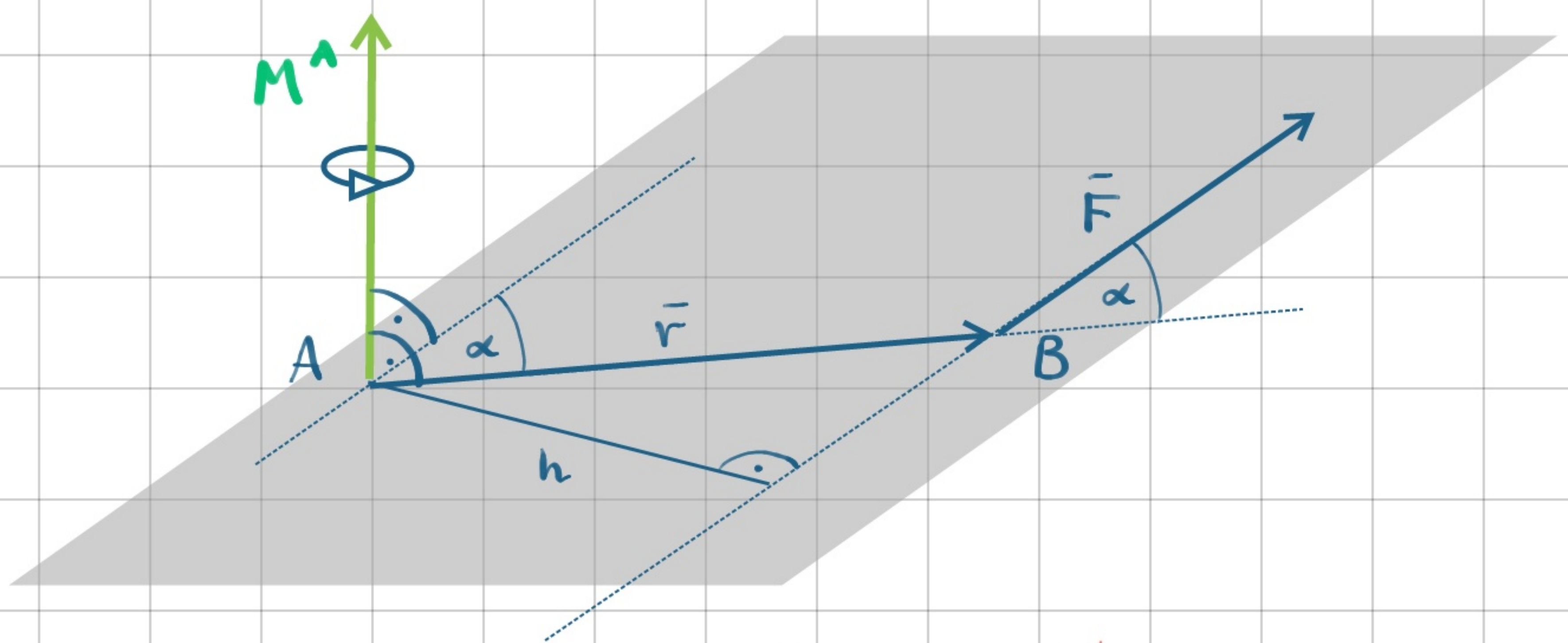
jednostką siły jest niuton

1 niuton ciała o masie 1 kg nadaje przyspieszenie wynoszące $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Sila jest wektorem a więc posiada wartość, kierunek i zwrot.

MOMENT SIŁY WZGLĘDEM PUNKTU

Moment siły $\vec{F}$ względem punktu A to wektor $\vec{M}^A$ który jest równy iloczynowi wektorowemu promienia wodzącego (promień-vektore) $\vec{r}$ i wektora siły $\vec{F}$.



$$\vec{M}^A = \vec{r} \times \vec{F}$$



wektor-promień, poprowadzony od punktu A (według którego liczymy moment siły) do początku wektora siły $\vec{F}$ lub dowolnego punktu leżącego na linii jej działania

iloczyn wektorowy możemy wyznaczyć także jako $M^A = F \cdot r \cdot \sin \alpha = \vec{F} \cdot h$

Jeśli punkt A (czyli biegun względem którego liczymy moment siły) leży na linii działania siły, wówczas M^A jest równy zero.



$$M^A = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

Moment siły względem punktu będzie wektorem z tym punktem związanym.

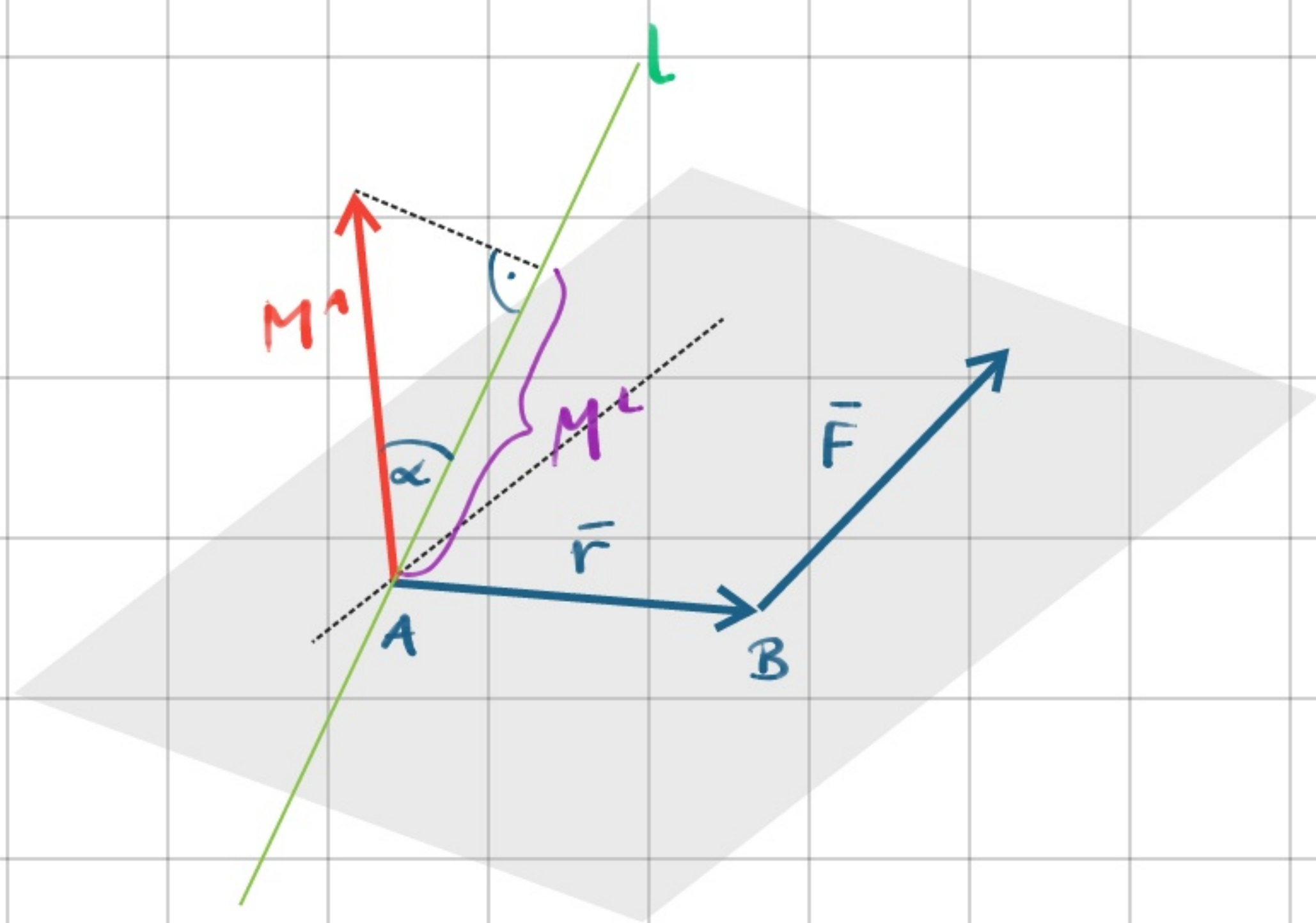
Moment siły wypadkowej jest równy sumie momentów sił składających się na tę siłę wypadkową.

$$M^A = \vec{r} \times \vec{F}_w = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n)$$

MOMENT SIŁY WZGLĘDEM OSI

Momentem siły $\vec{F}$ względem osi l będziemy nazywać rzut wektora momentu siły względem dowolnego punktu osi na tę oś.

Inaczej możemy powiedzieć, że moment siły $\vec{F}$ względem osi l to iloczyn wektorowy rzutów wektora wodzącego $\vec{r}$ i wektora siły $\vec{F}$ na płaszczyznę Π prostopadłą do tej prostej.



$$M^L = M^A \cos \alpha$$

$$|M^L| = 0 \text{ jeśli:}$$

- $\vec{r}_{\Pi} = 0$ czyli siła $\vec{F}$ jest zaczepiona do osi l
- $\vec{F}_{\Pi} = 0$ czyli siła $\vec{F}$ jest równoległa do osi
- $\sin(\vec{r}_{\Pi}, \vec{F}_{\Pi}) = 0$ czyli siła $\vec{F}$ i wektor $\vec{r}$ leżą wzdłuż jednej prostej

Kierunek wektora M^L pokrywa się z kierunkiem prostej l a zwrot jest określony układem wektorów $\vec{r}_{\Pi}$, $\vec{F}_{\Pi}$, M^L

WEKTOR GŁÓWNY I MOMENT GŁÓWNY

Wektorem głównym układu sił nazwiemy wektor swobodny równy geometrycznej sumie wszystkich sił tego układu.

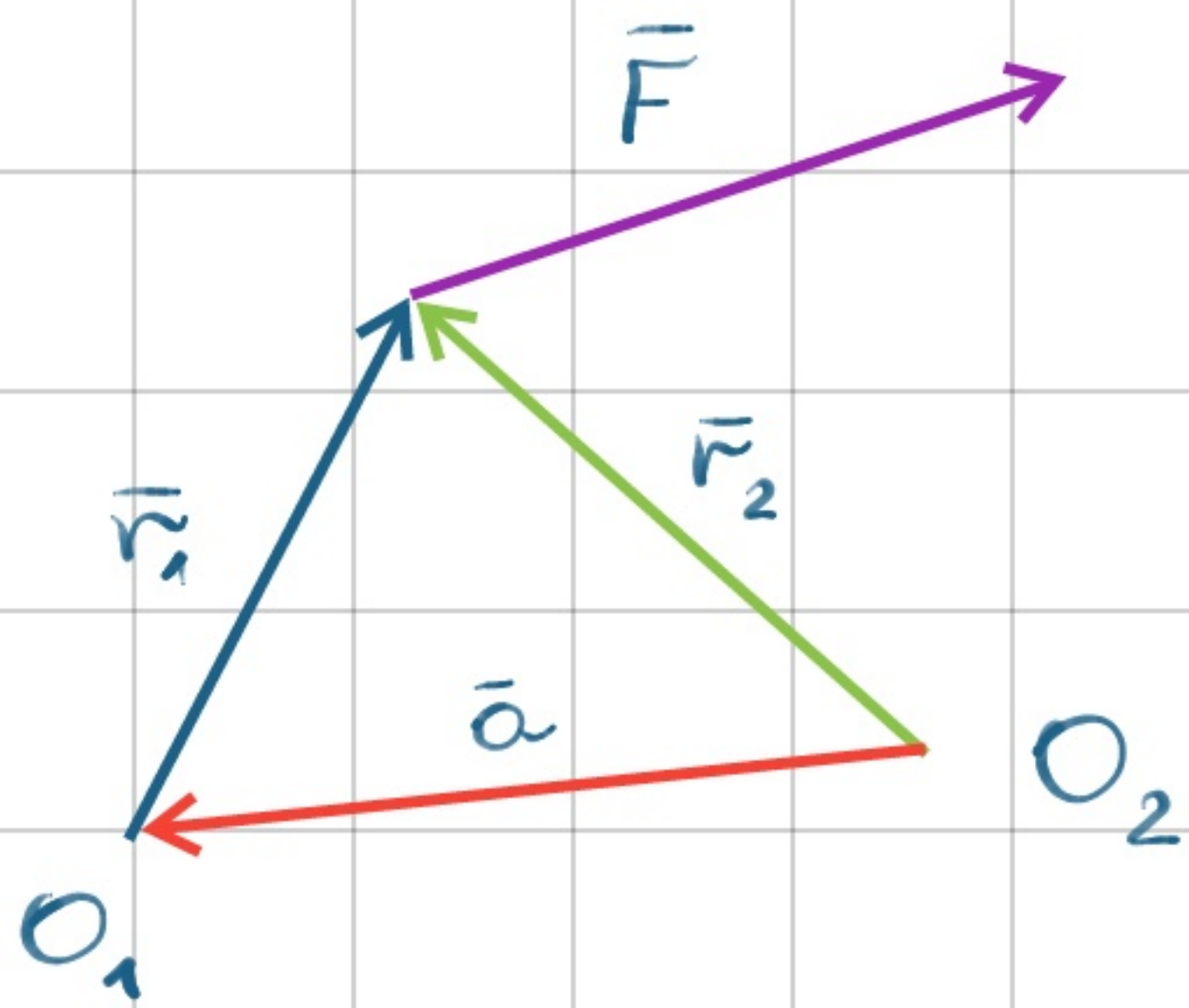
$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$$

Momentem głównym układu sił względem punktu A nazwiemy wektor równy sumie momentów danych sił układu względem punktu A.

$$\bar{M}^A = \sum_{i=1}^n M_i^A = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i)$$

$$\bar{S} = \bar{S}_x + \bar{S}_y + \bar{S}_z = \underbrace{\sum_{i=1}^n \bar{F}_{ix} + \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iy} + \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iz}}_{\text{składowe rzuty sił na osie}}$$

○ ile wektor główny $\bar{S}$ jest wektorem swobodnym,
o tyle wektor momentu głównego jest związany z biegunem.
Zmiana bieguna spowoduje zmianę jego wartości.



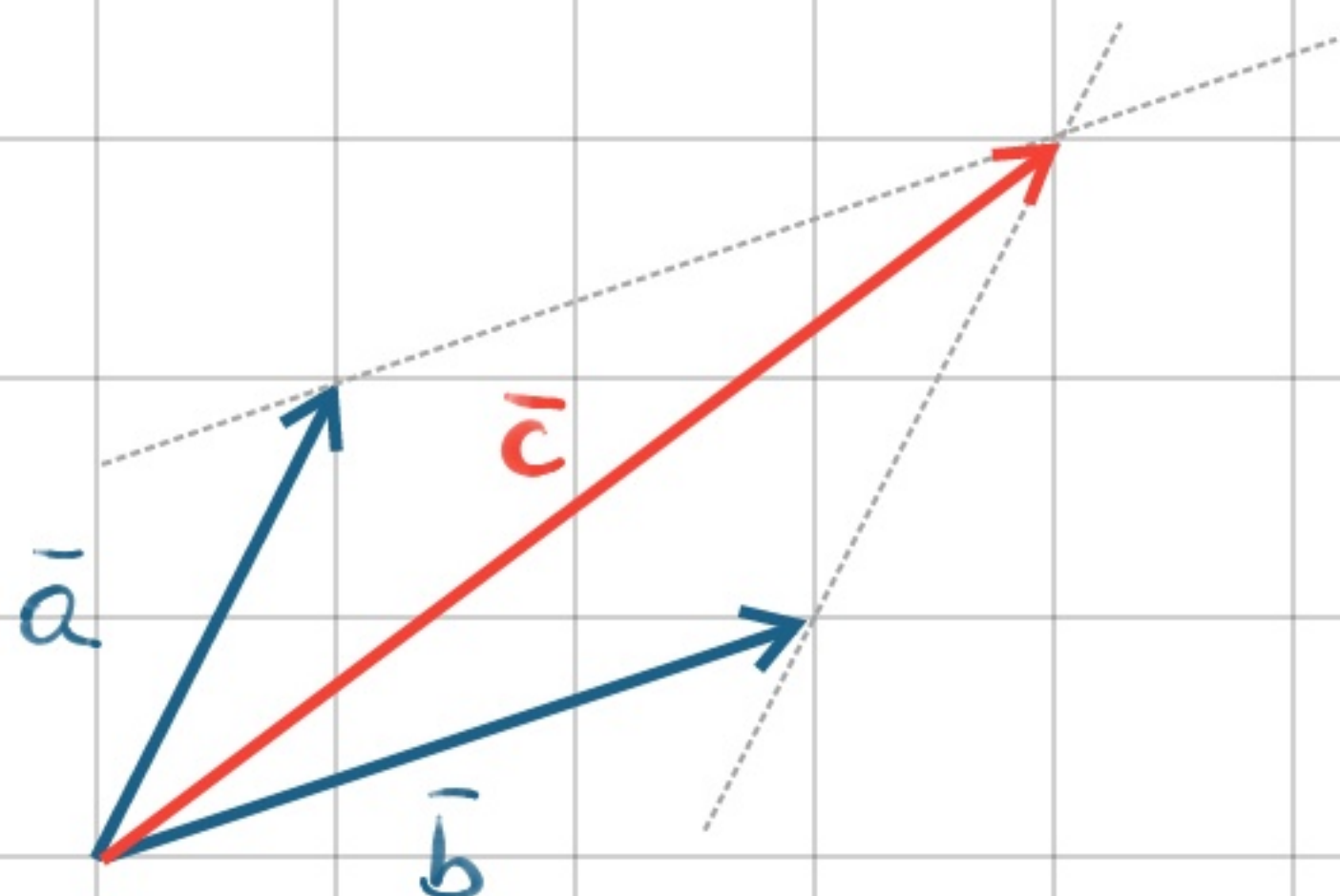
$$\bar{M}^{O_1} = \bar{r}_1 \times \bar{F}$$

$$\bar{M}^{O_2} = \bar{r}_2 \times \bar{F} = (\bar{a} + \bar{r}_1) \times \bar{F} = \bar{a} \times \bar{F} + \bar{r}_1 \times \bar{F}$$

$$= \bar{a} \times \bar{F} + \bar{M}^{O_1}$$

AKSJOMATY* STATYKI

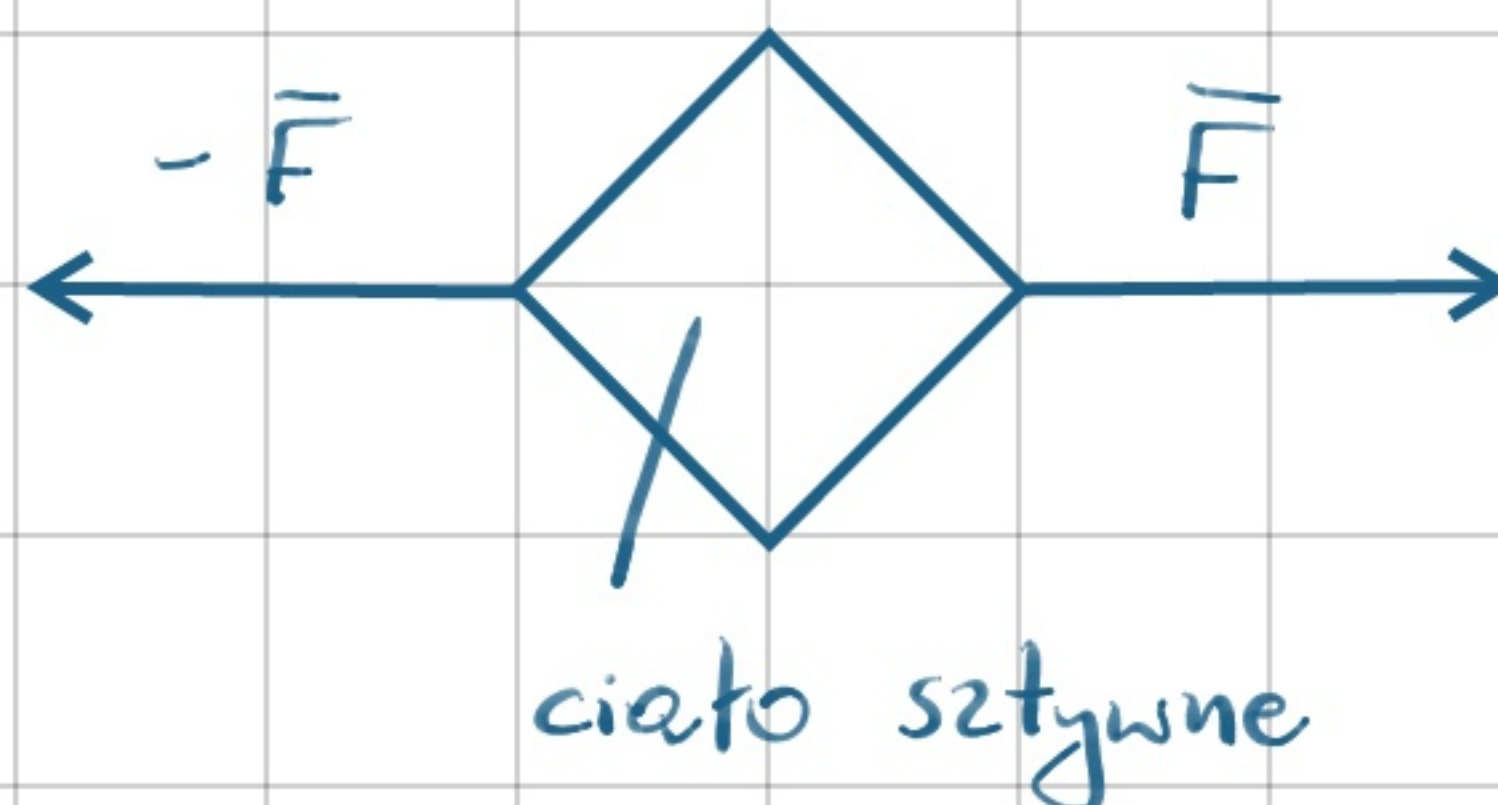
1. Zasada równoległoboku



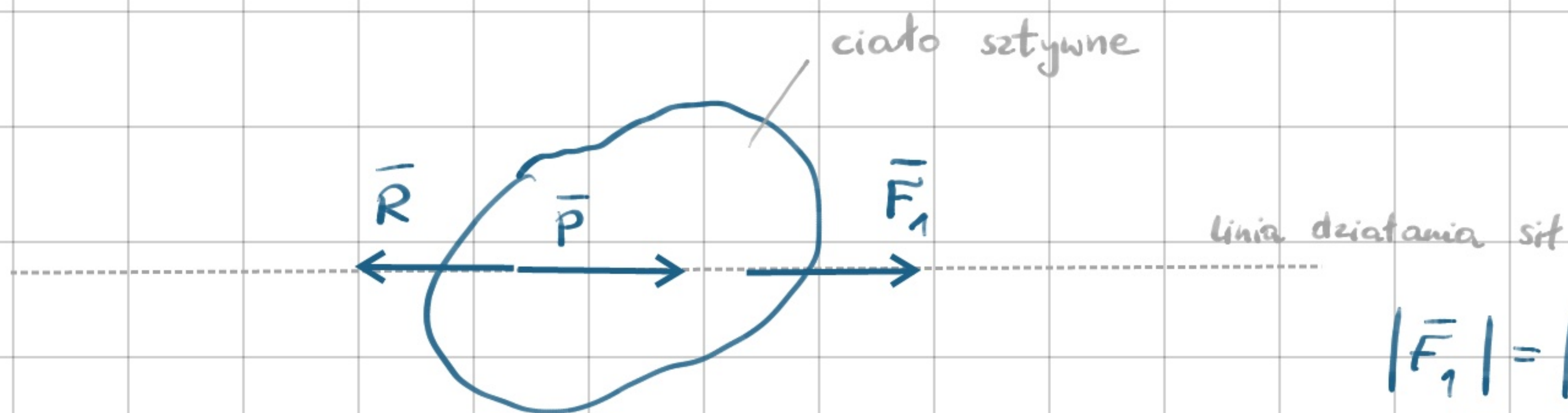
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

2. Zasada sił równoważących się

Jeśli mamy dwie siły przyłączone do ciała, to równoważą się one tylko wtedy gdy leżą na jednej linii działania, mają ten sam moduł ale przeciwne zwroty.



3. Zasada układu zerowego sił



$$|\vec{F}_1| = |\vec{P}| = |\vec{R}|$$

*

rzeczy pewne, niewymagające wyjaśnienia

Jeśli do dowolnego układu sił dodamy układ równoważący się, to w układzie tym nie się zmieni.

4. Zasada zesztymnienia

Jeśli ciało odkształcalne będące pod wpływem pewnego układu sił pozostaje w równowadze, to tym bardziej w stanie równowagi będzie się znajdować to ciało jako bryła sztywna pod wpływem tych samych sił.
W drugą stronę zasada ta nie działa.

5. Zasada działania i przeciwdziałania

- prawo akcji - reakcji

6. Zasada oswobodzenia z więzów

Każde ciało nieswobodne można myślowo oswobodzić z więzów zastępując ich działanie reakcjami a następnie rozważać jako ciało swobodne znajdujące się pod działaniem tych reakcji.

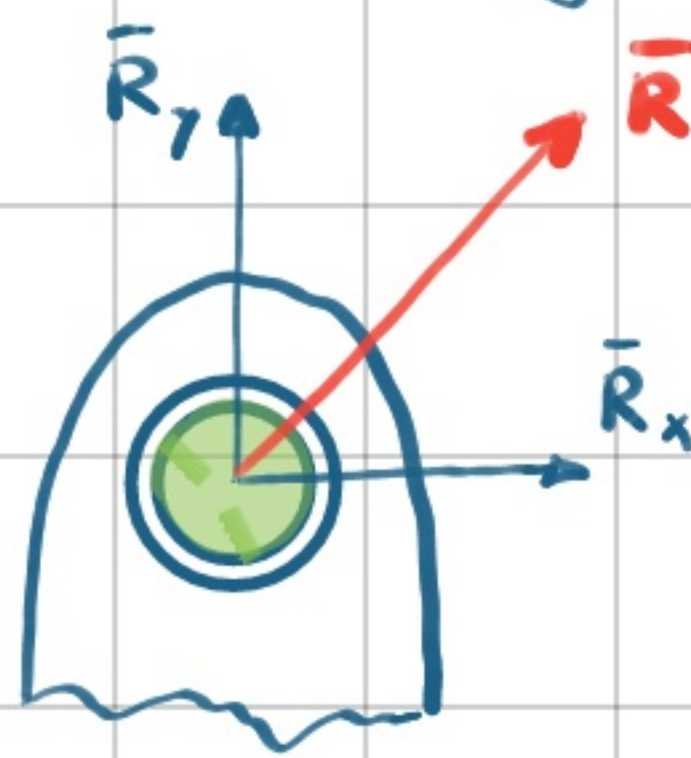


stopień swobody - możliwość wykonania ruchu
w sposób niezależny od innych
ruchów

- punkt materialny w przestrzeni posiada 3 stopnie swobody, na płaszczyźnie 2
- bryła sztywna posiada w przestrzeni 6 stopni swobody: $u_x, u_y, u_z, \text{rot}_x, \text{rot}_y, \text{rot}_z$

WIĘZY - ograniczenia swobody ruchu

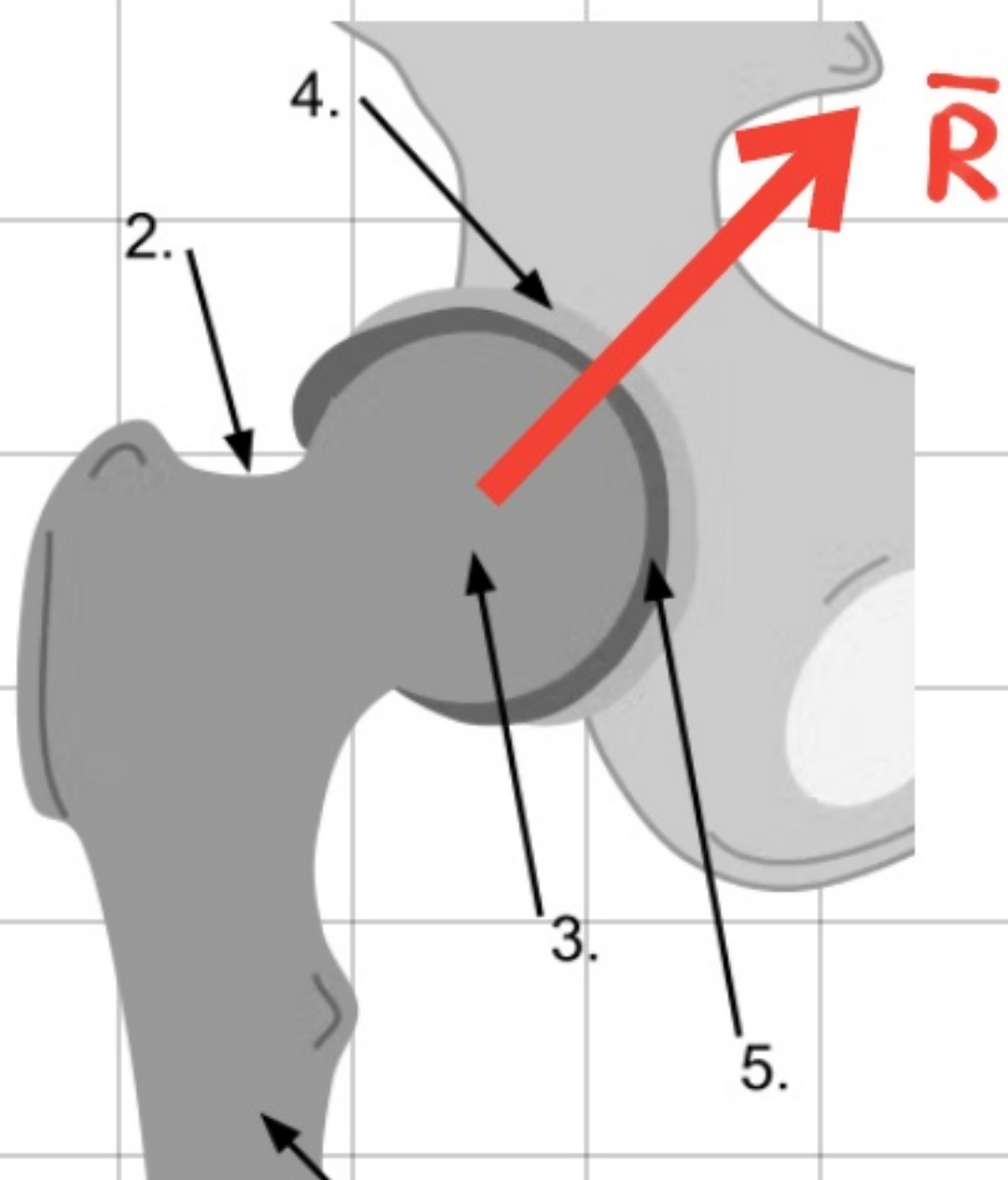
• przegub walcowy



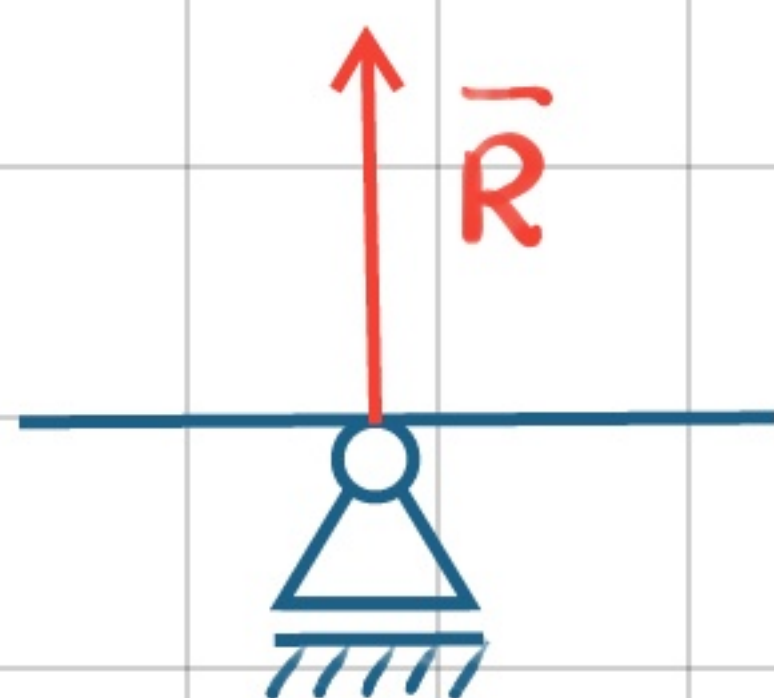
sile tarcia pomijamy
jako nieznaczne wobec
siły reakcji $\bar{R}$

ciało sztywne osadzone jest na walcowym sworzniu
przechodzącym przez otwór wykonany w tym ciele

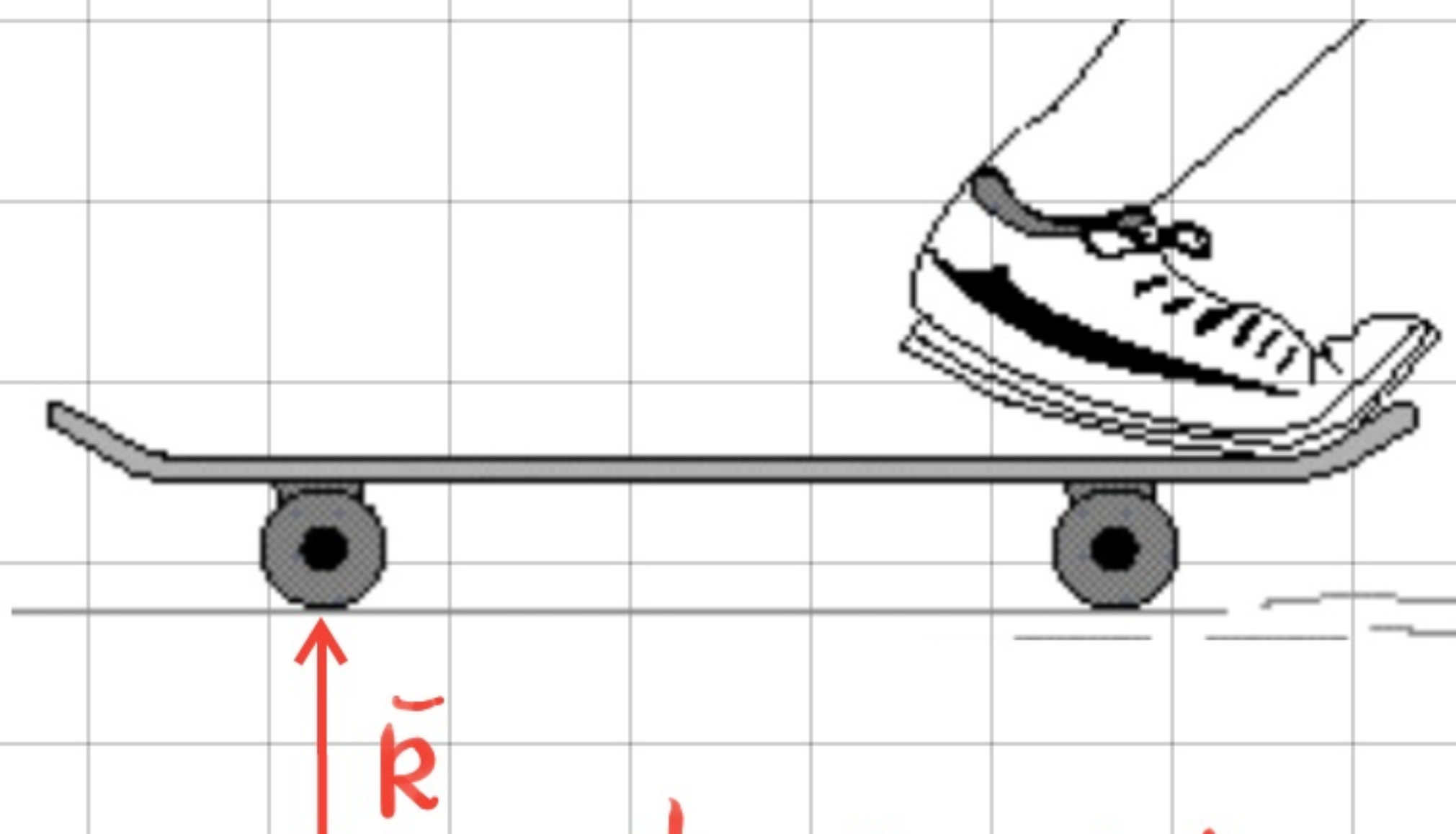
• przegub kulisty - daje podparcie (odbiera translację)
ale umożliwia rotację wokół
dowolnej osi, po pominięciu tarcia
powstająca reakcja przechodzi
przez środek kuli



- podpora przegubowa przesuwna (rolkowa)

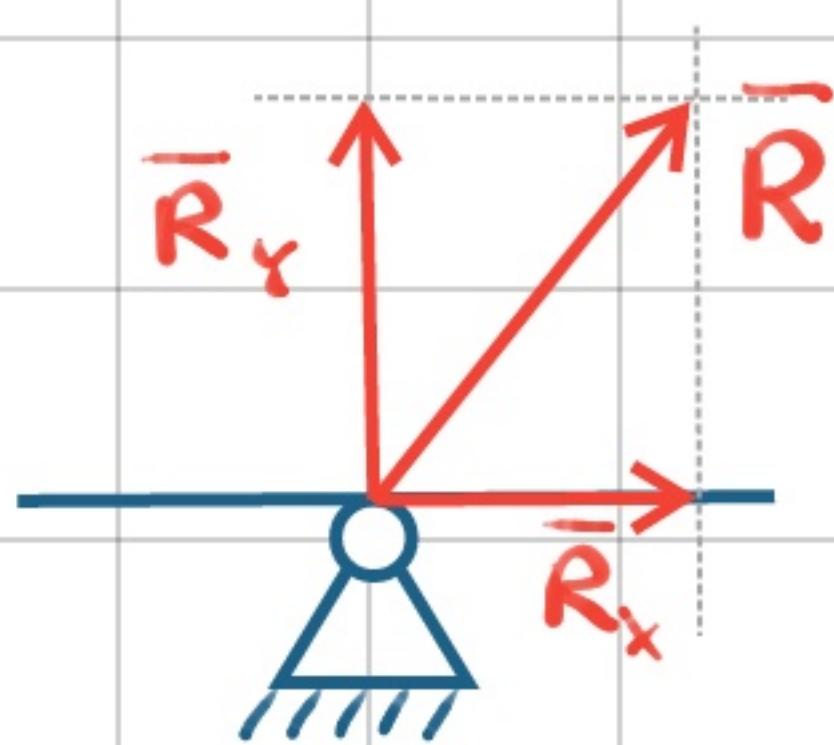


reakcja oporu przy toczeniu jest pomijalna, pozostaje jedynie reakcja prostopadła do podłoża

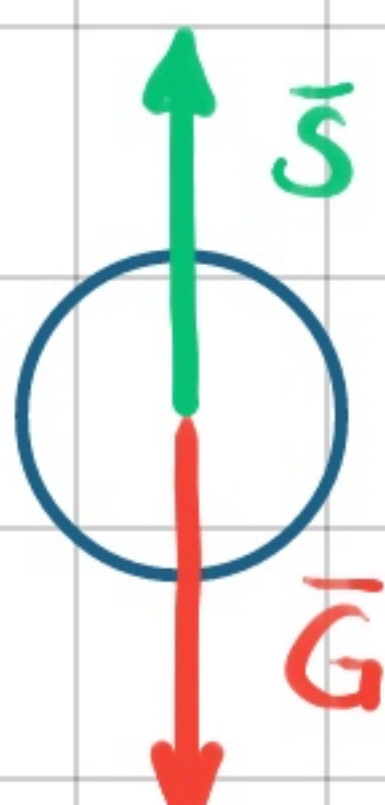
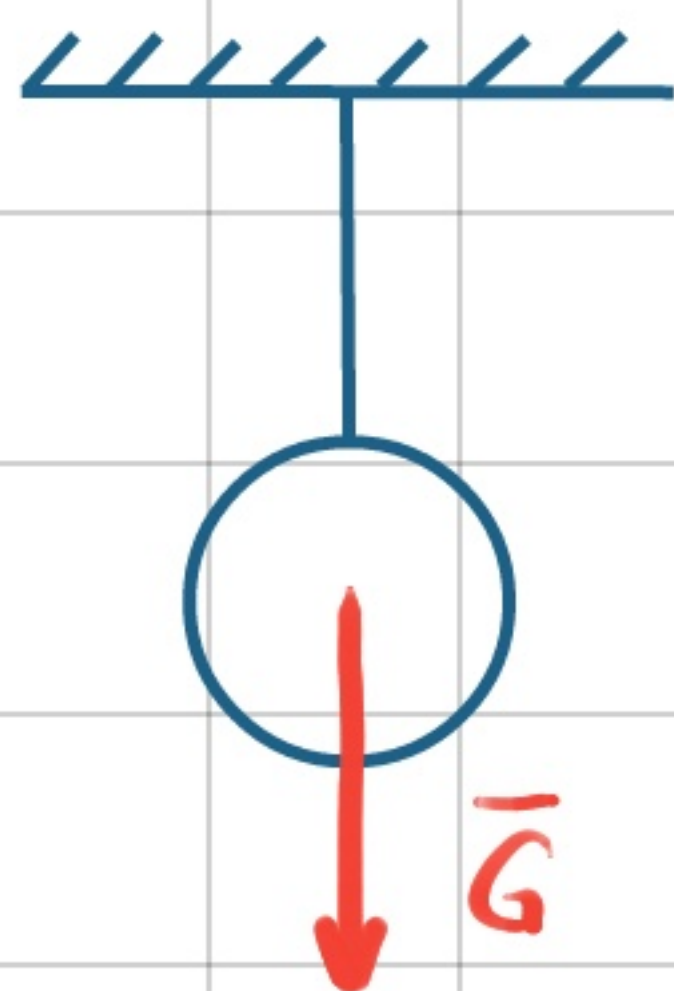


tarcie jest pomijalnie małe względem reakcji $\vec{R}$

- podpora przegubowa stała - wyłączone zostaje translacja pozostaje tylko rotacja wokół osi przegubu



- zawieszenie na wiotkich cięgnach - cięgno to podpora



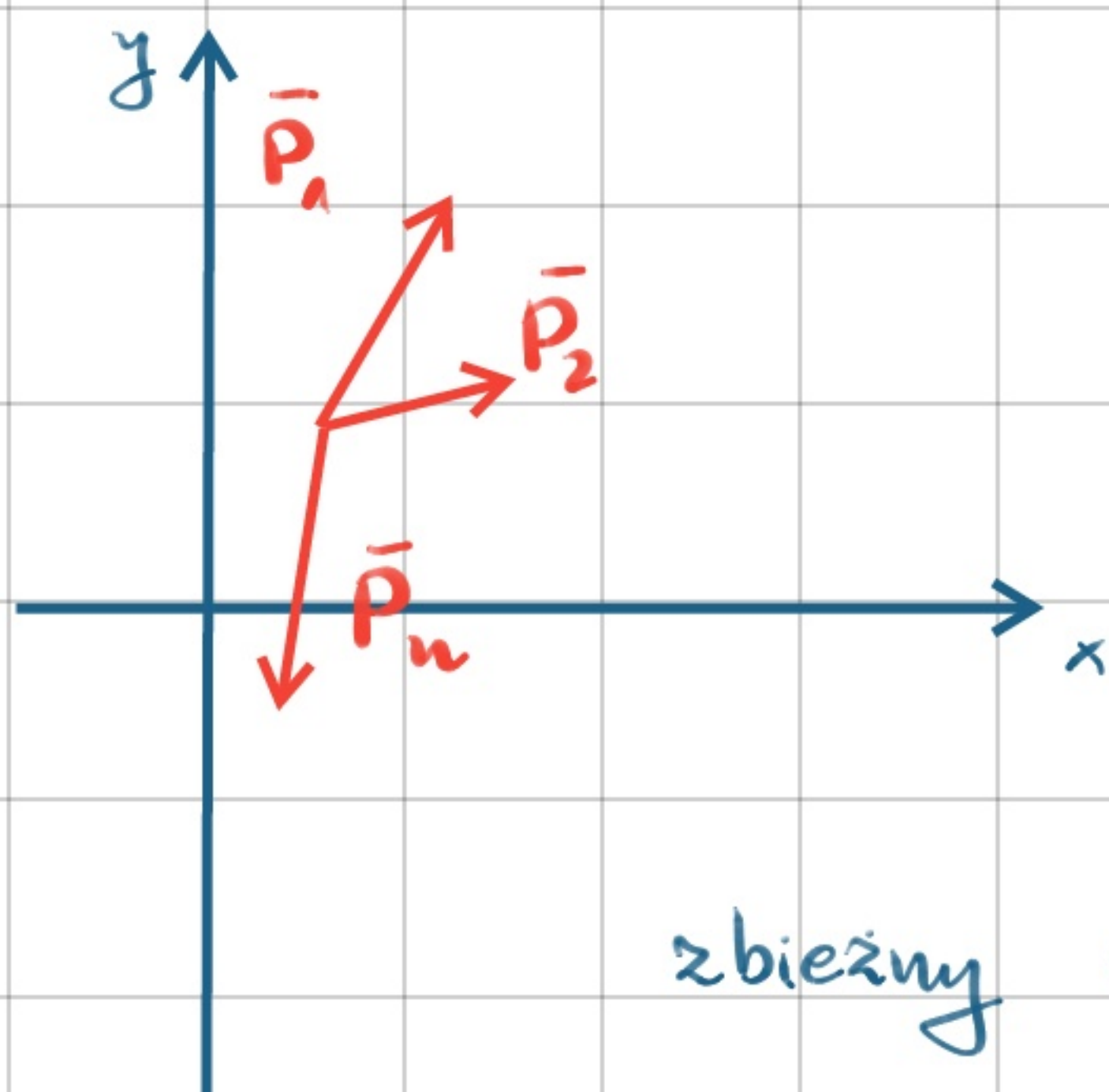
kierunkowa jednostronna
cięgno działa tylko
na rozciąganie

- podparcie o powierzchnię gładką i chropowatą

- ciało podparte na prętach przegubowych nieważłuch

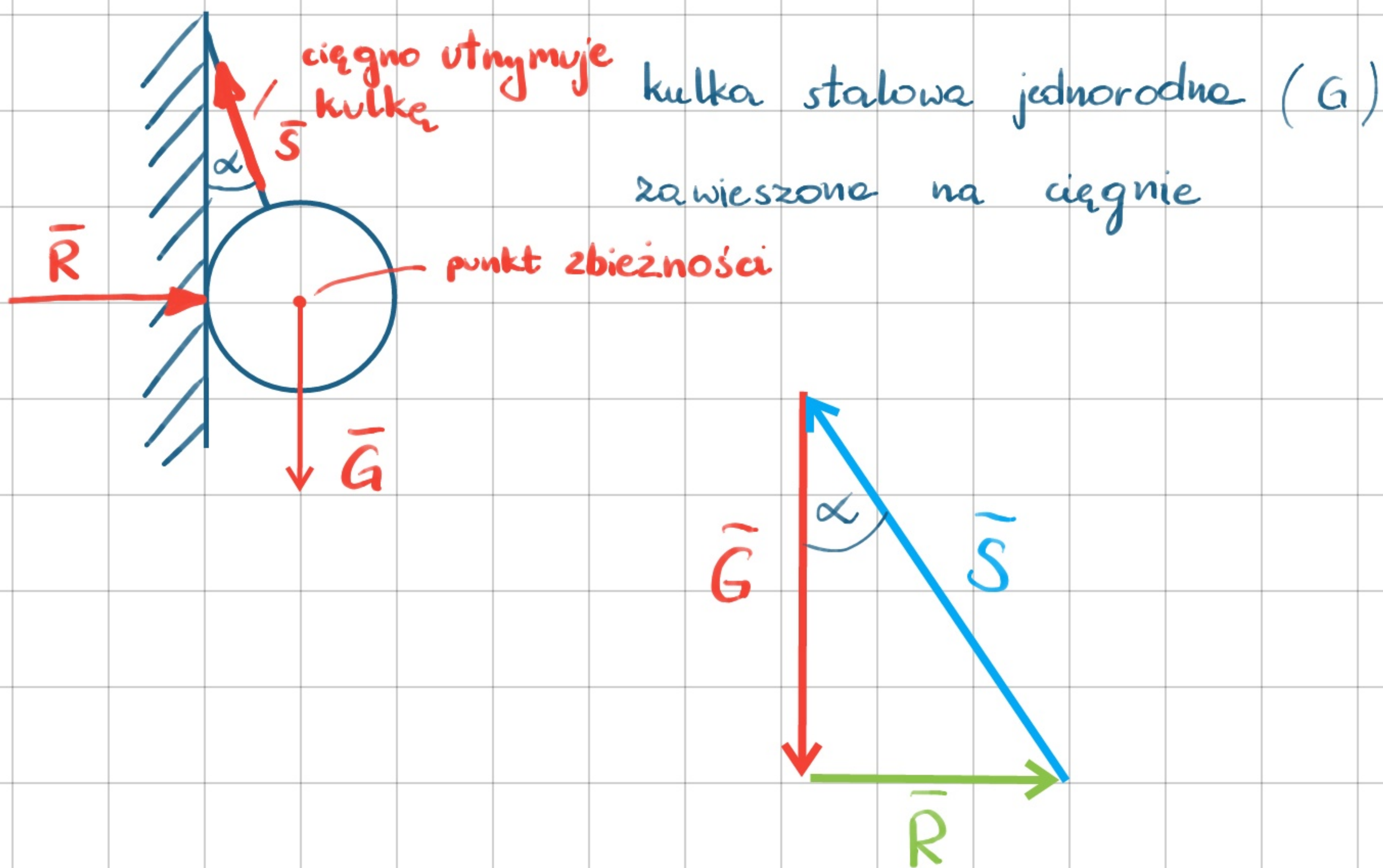
- podobnie jak ściąga, ale pracują zarówno na rozciąganie jak i ściskanie

Zbieżny układ sił



dowolny układ sił
nie musi być zbieżny

zbieżny układ to taki układ, w którym
linie działania wszystkich sił przechodzą,
przez 1 punkt - tzw. punkt zbieżności



Żeby układ był w równowadze, to siły tego
układu muszą sumować się do zera.

Wektory sił powinny tworzyć wielobok zamknięty.

RÓWNOWAGA PŁASKIEGO UKŁADU SIŁ ZBIEŻNYCH

Warunek geometryczny: układ sił zbieżnych $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$ działających w jednej płaszczyźnie znajduje się w równowadze, jeśli wielobok utworzony przez wszystkie siły tego układu jest zamknięty.

Dowody płaski układ sił znajduje się w równowadze jeśli:

- sumy rzutów sił na wszystkie osie układu są równe zero i moment wszystkich sił względem dowolnego bieguna jest również zerowy

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_i^O = 0$$

- moment sił układu względem dwóch punktów jest zerowy oraz suma rzutów sił na oś nieprostopadłą do odcinka łączącego bieguna jest również zerowa

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_i^{O_1} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_i^{O_2} = 0$$

• moment sił układu względem trzech biegunów
nieleżących na jednej prostej jest równy zero

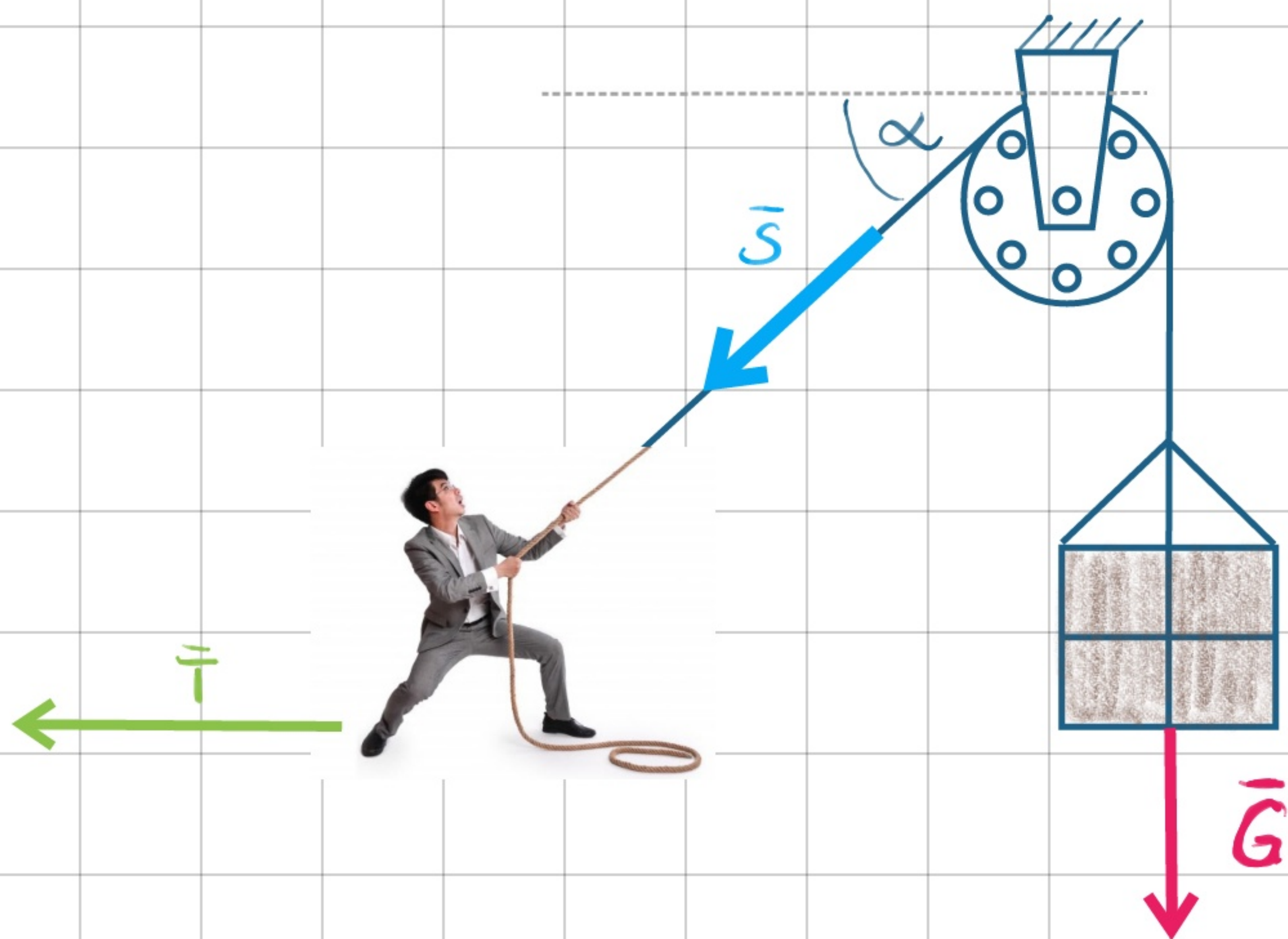
$$\sum_{i=1}^n M_i^{01} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_i^{02} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_i^{03} = 0$$

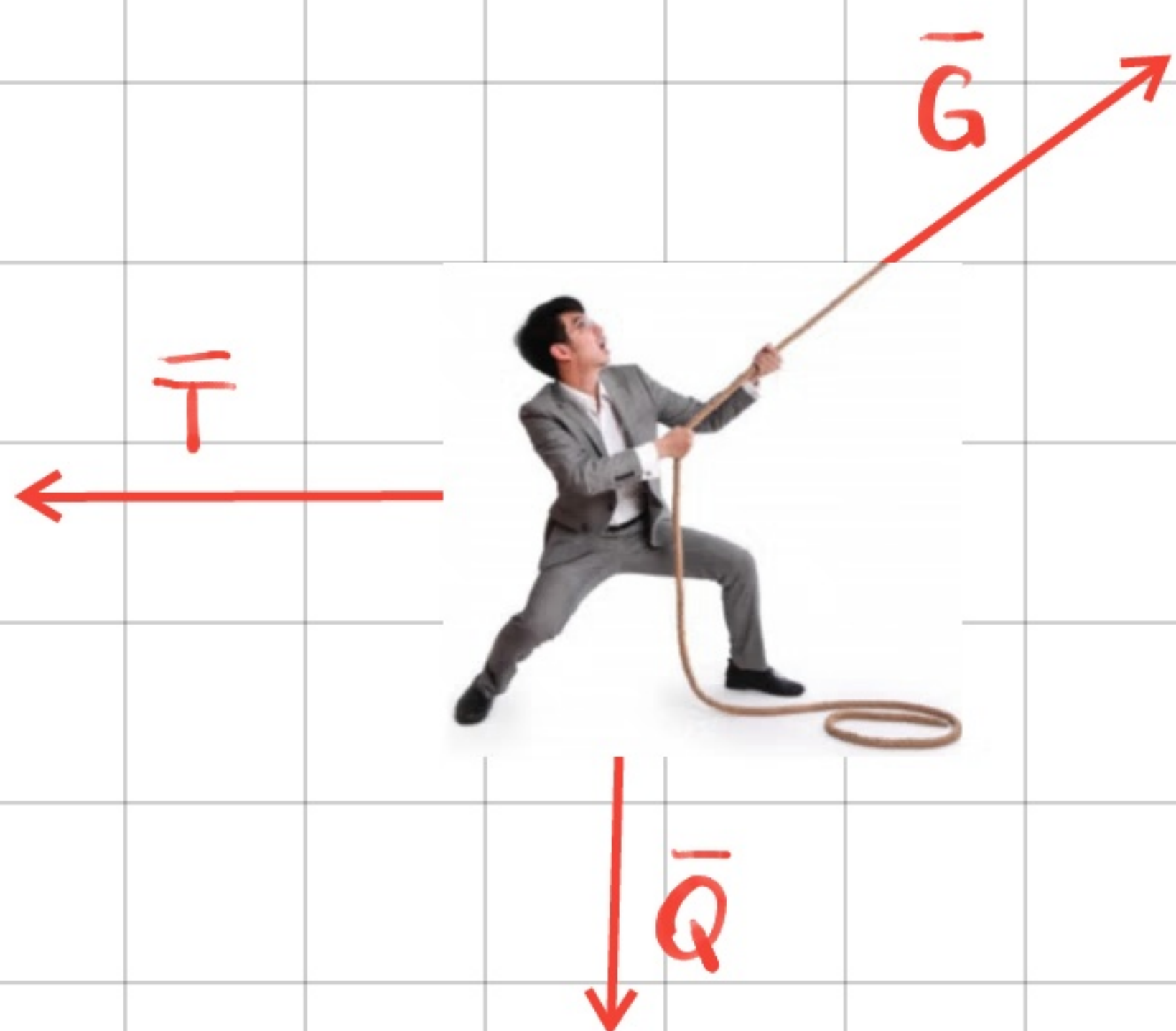
Tw. o 3 siłach nierównoległych

Układ 3 sił nierównoległych jest w równowadze wtedy, gdy linie działania tych sił przecinają się w jednym punkcie i tworzą razem zamknięty trójkąt sił.



Pracownik ciągnie za linę na końcu której wisi skrzynia o ciężarze $\vec{G}$. Jak wygląda rozkład sił w układzie? Lina jest nieważka, w blozku nie ma tarcia.

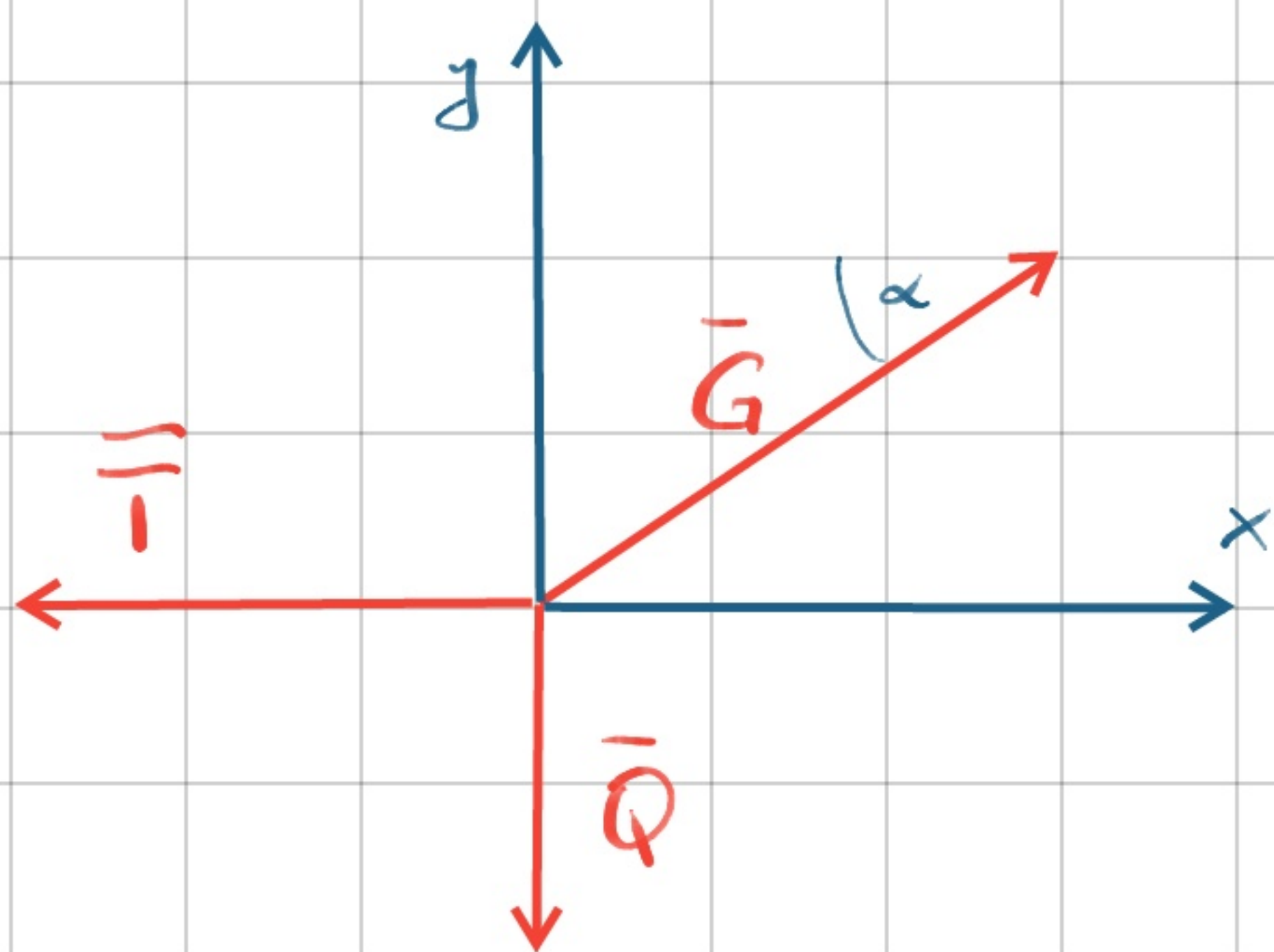
Pracownik ciągnie linę, aby zrównoważyć ciężar. Jednocześnie musi się zaprzeć, aby nie zostać przeciągniętym przez składową poziomą siły w linie wywołanej ciężarem skrzyni.



zgodnie z warunkami: w bloku nie następujemy opory, ciężko na którym ciężar wisi jest nieważkie - siłę $\vec{G}$ możemy przenieść bezpośrednio do pracownika; w równowadze utrzymuje pracownika tarcie i jego własny ciężar

Sprawdzimy teraz zagadnienie do problemu 3 sił nierównoległych, a pracownika do punktu.

METODA ANALITYCZNA



2 warunków równowagi:

$$\sum \vec{F}_{ix} = 0$$

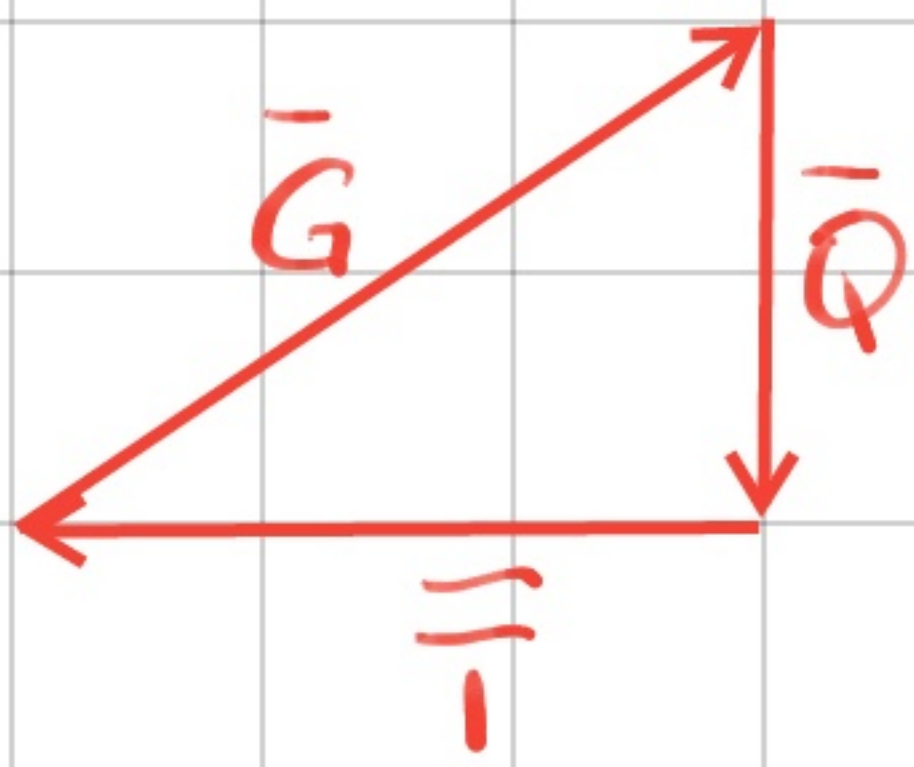
$$-T + G \cos \alpha = 0$$

$$T = G \cos \alpha$$

$$\sum \vec{F}_{iy} = 0$$

$$-Q = G \sin \alpha$$

METODA GRAFICZNA



metoda graficzna stanowi dobre
uzupełnienie do obliczeń analitycznych
na ich jakościowe potwierdzenie
lub w pierwszym rzucie do oszacowanie
spodziewanego wyniku