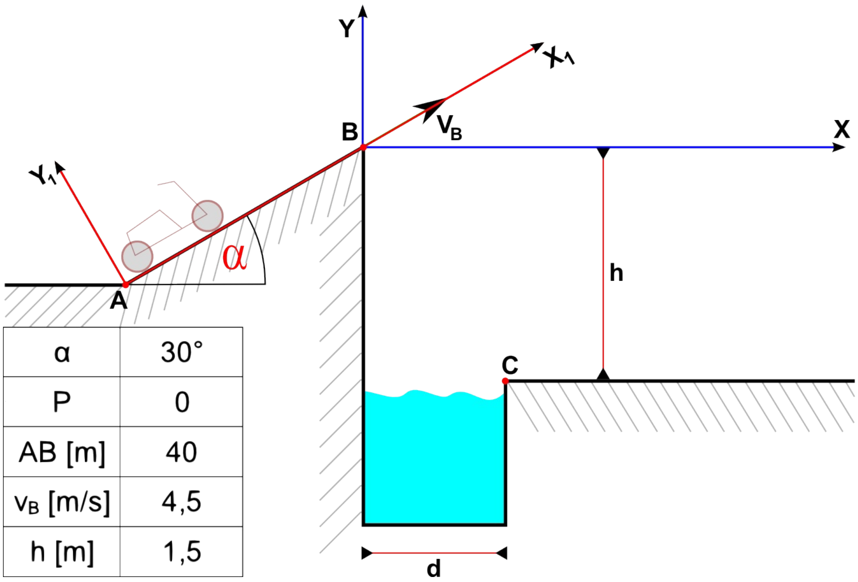
1. D-1 – Równania różniczkowe ruchu punktu materialnego

Zad. 1.1

Motocyklista porusza się po płaszczyźnie AB nachylonej do poziomu pod kątem α. W punkcie B osiągając prędkość v_B, opuszcza płaszczyznę AB i spada ponad kanałem w punkcie C na poziomą płaszczyznę. Siła P działająca na motocykl jest stała na całym odcinku AB. Oblicz prędkość w punkcie A a także odległość d, na jaką maksymalnie dolecieć może motocyklista tak aby uniknąć upadku do kanału. Opory toczne oraz opory powietrza pominąć, motocykl potraktować jako punkt materialny.



α	30°
P	0
AB [m]	40
v_B [m/s]	4,5
h [m]	1,5

Aby rozwiązać zadanie, należy sformułować równanie dynamiczne w każdym podukładzie tj. w x_1y_1 oraz w xy.
W pierwszym układzie równanie dynamiczne przyjmie postać, którą kolejno całkując po czasie i wyliczając stałe C1 i C2 z warunków początkowych zadania doprowadzimy do postaci pozwalającej policzyć czas ruchu na odcinku AB, a następnie prędkość w punkcie A.

$$m\ddot{x}_1 = -G\sin\alpha$$

$$\ddot{x}_1 = -g\sin\alpha$$

$$\dot{x}_1 = -gt\sin\alpha + C_1 \quad \textit{gdzie dla } t=0 \quad \dot{x}_1 = v_A, \textit{ więc } C_1 = v_A$$

$$\dot{x}_1 = -gt\sin\alpha + v_A \quad \textit{gdzie } \ddot{x}_1 = v_B$$

$$\textit{zatem} \quad v_B = -gt\sin\alpha + v_A$$

$$x_1 = -\frac{gt^2}{2}\sin\alpha + v_A t + C_2 \quad \textit{gdzie dla } t=0 \quad x_1 = 0, \textit{ więc } C_2 = 0$$

$$x_1 = -\frac{gt^2}{2}\sin\alpha + v_A t \quad \textit{gdzie } x_1 = \bar{AB}$$

$$\textit{zatem} \quad \bar{AB} = -\frac{gt^2}{2}\sin\alpha + v_A t$$

W tym momencie mamy dwa równania, które wiążą czas, jeśli dokonamy podstawienia:

$$v_A = v_B + \frac{gt}{2}$$

$$\bar{AB} = v_a t - \frac{gt^2}{4}$$

w podstawieniu tym dokonano zamiany wielkości $\sin\alpha = \frac{1}{2}$

$$\bar{AB} = v_B t + \frac{gt^2}{2} - \frac{gt^2}{4}$$

$$\bar{AB} = v_B t + \frac{gt^2}{4}$$

W dalszym ciągu obliczeń wyliczamy czas t, w którym motocyklista pokonuje odcinek AB:

$$t^2 + \frac{4v_B t}{g} - \frac{4l}{g} = 0$$

$$\Delta = \frac{16v_B^2}{g^2} - \frac{16\bar{AB}}{g}$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$v_A = v_B + \frac{gt}{2}$$

Obliczeń nie wrzuciłem już do pliku, niemniej jednak przeprowadziłem je i tego także będę wymagał na kolokwium.

W drugiej części zadania obliczamy maksymalną szerokość kanału, jaką motocykliście uda się przelecieć, tak by bezpiecznie wylądować na drugim brzegu. Należy zatem sformułować drugie równanie dynamiczne. Pod uwagę należy wziąć fakt, iż jedyna działającą siłą jest siła grawitacji. Czas w tej części zadania będziemy zapisywać za pomocą *T,* by uniknąć błędnych skojarzeń z częścią pierwszą zadania. Oba liczone czasy stanowią odrębne wielkości. W momencie, gdy motocyklista opuszcza skarpę i rozpoczyna lot nad kanałem, czas T jest liczony od 0 (zera) do wartości T_K kiedy motocyklista wyląduje:

$$m\ddot{y} = -G$$

$$\ddot{y} = -g$$

$$\dot{y} = -gT + C_3 \quad \dot{y} \text{ ma wymiar prędkości, zatem } \dot{y} = v_B \sin\alpha,$$

$$dla\ T = 0 \ \ C_3 = v_B \sin\alpha$$

$$y = -\frac{gT^2}{2} + v_B T \sin\alpha + C_4 \quad y \text{ ma wymiar drogi, zatem } y = 0$$

$$dla\ T = 0 \ \ C_4 = 0$$

$$y = -\frac{gT^2}{2} + v_B T \sin\alpha$$

W chwili lądowania motocyklisty przy założonym układzie odniesienia y = -h co należy zapisać jako :

$$-h=-\frac{gT^2}{2}+v_B T\sin\alpha$$

$$\frac{gT^2}{2}-v_B T\sin\alpha-h=0$$

$$T^2-\frac{2v_B T\sin\alpha}{g}-\frac{2\mathrm{h}}{g}=0$$

$$\textit{po zamianie}\ \sin\alpha=\frac{1}{2}$$

$$T^2-\frac{v_B T}{g}-\frac{2\mathrm{h}}{g}=0$$

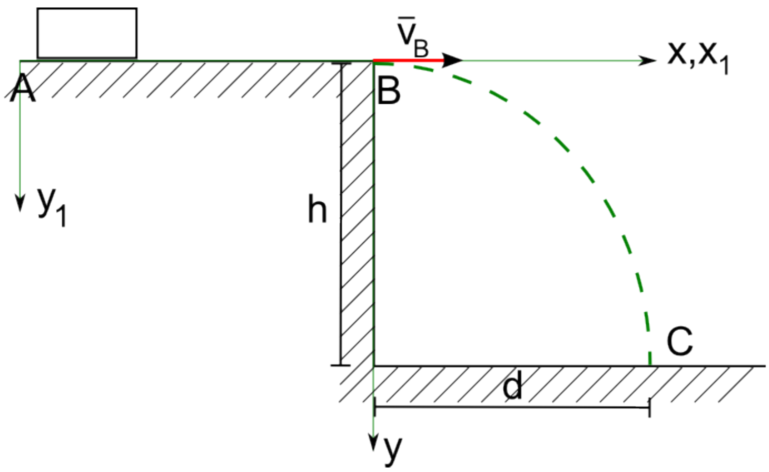
Podobnie jak ostatnio obliczamy pierwiastki równania kwadratowego, znajdujemy czas (musi być większy od zera). Po znalezieniu czasu możemy odnaleźć szerokość kanału *d*, która wynosić będzie:

$$v_{Bx}=v_B\cos\alpha$$

$$d=v_{Bx}\,T$$

Zad. 1.2

Ciało porusza się na poziomym odcinku AB o długości k w czasie t [s]. Współczynnik tarcia posuwistego wynosi f. Ciało opuszcza płaszczyznę w punkcie B z prędkością v_B i osiąga w punkcie C prędkość v_C, przebywając w powietrzu T s. W rozwiązaniu ciało przyjąć za punkt materialny a opory powietrza ominąć.



v_A [m/s]	f	k [m]	h [m]	**v_C**	**d**
7	0,2	8	20	**?**	**?**

Przy powyższych danych i szukanych budujemy równania dynamiczne najpierw dla układu x_1y_1, a następnie dla xy.

$$m\ddot{x}_1 = -T \quad T = fN \quad N = G \quad T = fG$$

$$m\ddot{x}_1 = -fmg$$

$$\ddot{x}_1 = -fg$$

$$\dot{x}_1 = -fgt + C_1 \;\; gdzie\ dla\ t=0 \;\; \dot{x}_1 = v_A,\ więc\ C_1 = v_A$$

$$\dot{x}_1 = -fgt + v_A \;\; gdzie\ \ddot{x}_1 = v_B$$

$$zatem \quad v_B = -fgt + v_A$$

$$x_1 = -\frac{fgt^2}{2} + v_A t + C_2 \;\; gdzie\ dla\ t=0 \;\; x_1 = 0,\ więc\ C_2 = 0$$

$$x_1 = -\frac{fgt^2}{2} + v_A t \;\; gdzie\ x_1 = k$$

$$zatem \quad k = -\frac{fgt^2}{2} + v_A t$$

W zadanych warunkach zadania znane jest nam k oraz v_A więc z ostatniego równania policzyć możemy czas t, w jakim ciało pokonuje odcinek AB = k:

$$k = -\frac{fgt^2}{2} + v_A t$$

$$t^2 - \frac{2v_A}{fg}t + \frac{2k}{fg} = 0$$

Analogicznie jak w poprzednim zadaniu wyszukujemy pierwiastków równania i znajdujemy czas t. Jeśli wyznaczymy czas, wtedy bez problemu możemy wyliczyć prędkość v_B:

$$v_B = -fgt + v_A$$

Po wyliczeniu prędkości v_B możemy przystąpić do drugiej części zadania, gdzie przy pomocy drugiego równania dynamicznego obliczymy żądane wielkości *d* i v_C. Jedyną działającą siłą jest siła grawitacji, możemy zatem zbudować równanie dynamiczne i odpowiednio całkując je po czasie będziemy w stanie wyliczyć pr

$$m\ddot{y}=G$$

$$\ddot{y}=g$$

$$\dot{y}=gT+C_3 \quad \dot{y}\ ma\ wymiar\ prędkości,\ dla\ T=0\ \ \dot{y}=0\ \ zatem\ C_3=0,$$

$$y=\frac{gT^2}{2}+C_4 \quad y\ ma\ wymiar\ drogi,\ dla\ T=0\ \ y=0\ \ więc\ C_4=0$$

$$y=\frac{gT^2}{2}$$

Dla szukanego czasu T, y = h, więc równanie przybierze postać:

$$h=\frac{gT^2}{2}$$

$$T=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Po obliczeniu czasu T, będziemy mogli obliczyć odległość d. Jest to odległość, na jaką przemieści się w czasie T ciało przemieszczające się ze stałą prędkością v_B:

$$d=v_BT$$

2. D-4 – Całkowanie równań dynamicznych ruchu punktu materialnego w ruchu względnym

Rozwiązywanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania różniczkowego jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania różniczkowego niejednorodnego.

1. Metoda uzmiennania stałej

1.1. Znajdujemy całkę ogólną.

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$
$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$$
$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$$
$$\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx$$
$$\ln|y|=-\int p(x)dx$$
$$y=Ce^{-\int p(x)dx}$$

1.2. Uzmiennianie stałej.

$$C=C(x)$$
$$y=Ce^{-\int p(x)dx}$$

1.3. Różniczkujemy względem x

$$y'=C'(x)e^{-\int p(x)dx}+C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x))$$

1.4. Podstawiamy do równania. $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)\rightarrow y'+p(x)y=q(x)$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx}+C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x))+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$$
$$C'(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$$
$$C'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}$$
$$\frac{dC(x)}{dx}=q(x)e^{\int p(x)dx}$$
$$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

1.5. Uzyskane C(x) wstawiamy do $y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$

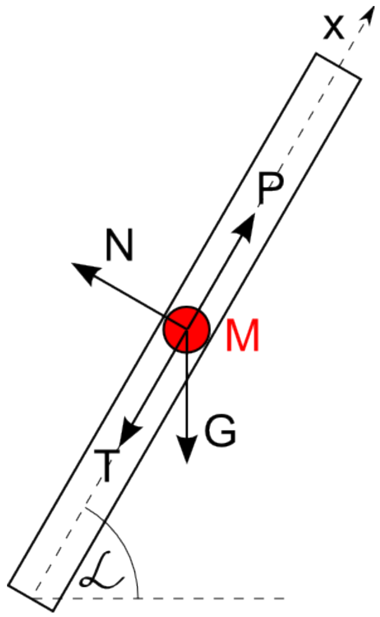
$$y_1=e^{\int p(x)dx}*\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\rightarrow \textit{całka szczególna}$$

ROZWIĄZANIE KOŃCOWE:

$$y_k=y+y_1$$
$$y_k=C(x)e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}*\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

Zad. 2.1 – Ciastoń D2-2

Znaleźć równania ruchu ciała M o masie m, przyjmując je za punkt materialny znajdujący się pod działaniem siły zmiennej siły P.



m [kg]	P [N]	f	x_0	$\dot{x}_0$	α
0,25	100	0,3	0,03	0,5	60

Dla układu budujemy równanie dynamiczne:

$$X:\ m\ddot{x}=P-G\sin\alpha-T$$
$$Y:\ 0=N-G\cos\alpha$$
$$N=G\cos 60^o=\frac{G}{2}$$
$$T=fN=\frac{fG}{2}$$
$$m\ddot{x}=P-G\sin\alpha-\frac{fG}{2}$$
$$\ddot{x}=\frac{P}{m}-g\sin\alpha-\frac{fg}{2}$$
$$\ddot{x}=400\text{x}-8{,}49-1{,}47$$
$$\ddot{x}=400\text{x}-9{,}69$$

Następnie dokonujemy podstawienia: $x=a \quad \dot{x}=0 \quad \ddot{x}=0$

$$\ddot{x}=400\text{x}-9{,}69$$
$$0=400\text{a}-9{,}96$$
$$a=0{,}0249$$

$$\ddot{x}-400\text{x}=0$$
$$\ddot{x}=400\text{x}$$
$$x=e^{rt} \quad \dot{x}=r\,e^{rt} \quad \ddot{x}=r^2 e^{rt}$$
$$r^2 e^{rt}=400\,e^{rt}$$
$$r^2=400$$
$$r=20 \ \ lub \ \ r=-20$$
$$x=C_1 e^{20\text{t}}+C_2 e^{-20\text{t}}$$

$$rozwiązanie\ ostateczne \rightarrow x=C_1 e^{20\text{t}}+C_2 e^{-20\text{t}}+0{,}0249$$

Ostatecznie stałe C_1 oraz C_2 wyliczamy z warunków początkowych.