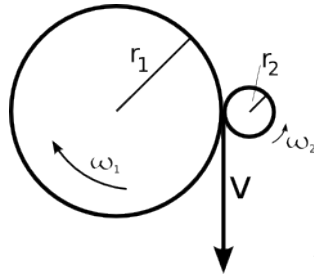


1. K-5 Ruch postępowy i obrotowy ciała sztywnego

Zadanie 1

Koło napędowe o promieniu $r_1=1\text{m}$ przekładni ciernej wprawia w ruch koło o promieniu $r_2=0,25\text{m}$ z przyspieszeniem $\epsilon_1=0,2\text{st}$. Po jakim czasie prędkość obrotowa drugiego koła osiągnie wartość $n_2=480\text{ obr/min}$?



W zadaniu obliczamy najpierw prędkość v . Można zdefiniować, że:

$$v = r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$$

Należy także dokonać zamiany prędkości obrotowej na prędkość kątową:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

zapis taki ma sens ponieważ, jeśli n oznacza liczbę obrotów na minutę to $\frac{2\pi n}{60}$ oznacza liczbę pełnych $2\pi=360^\circ$ obrotów w ciągu 60 sekund. Możemy zatem zdefiniować prędkość liniową jako:

$$v = \frac{2\pi n_1}{60} r_1 = \frac{\pi n_1 r_1}{30} = \frac{\pi n_2 r_2}{30}$$

jeśli zatem $n_2=480$, wtedy

$$\frac{\pi n_1 r_1}{30} = \frac{\pi 480 r_2}{4 \cdot 30}$$
$$n_1 = 120 \text{ obr/min}$$

Znając już prędkość obrotową n_1 oraz przyspieszenie $\epsilon_1=0,2\text{st}$, można policzyć ile wynosi prędkość kątowa a znając prędkość obrotową, możemy policzyć czas po jakim ta prędkość zostanie osiągnięta.

$$\epsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0,2\pi t$$

$$d\omega_1 = 0,2\pi t dt$$

$$\int_0^{\omega_1} \omega_1 = \int_0^t 0,2\pi t dt$$

$$\omega_1 = 0,1\pi t^2$$

$$\omega_1 = 0,1\pi t^2 = \frac{\pi 120}{30} = 4\pi$$

$$t = \sqrt{\frac{\omega_1}{0,1\pi}} = \sqrt{\frac{4\pi}{0,1\pi}} = 2\sqrt{10} = 6,32 \text{ [s]}$$

Odp. Czas po jakim koło r_2 osiągnie prędkość obrotową $n_2=480\text{ obr/min}$ wynosi $6,32\text{ [s]}$.

Zadanie 2 – Dla zadanego równaniem ruchu postępowego prostoliniowego ciężaru 1 określić prędkość i przyspieszenie obrotowe, doosiowe oraz całkowite punktu M mechanizmu w chwili, kiedy droga przebyta przez ten ciężar jest równa s .

Dane:

$$R_2 = 60 \text{ [cm]}$$

$$r_2 = 45 \text{ [cm]}$$

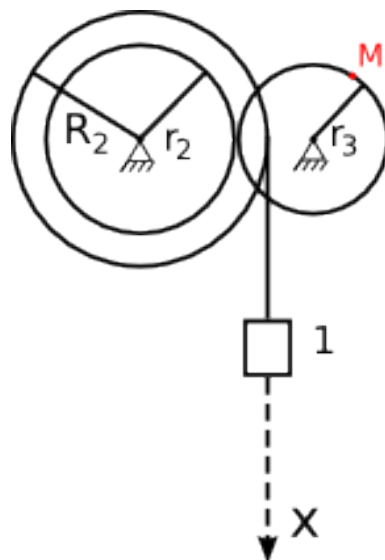
$$r_3 = 36 \text{ [cm]}$$

$$x = 10 + 100t^2 \text{ [cm]; } t \rightarrow \text{[s]}$$

$$s = 50 \text{ [cm]}$$

Szukane:

$$v, a, a_n, a_t$$



Droga jaką przebywa ciężar 1 w czasie $t = \tau$ wynosi s :

$$s = x(t = \tau) - x(t = 0) = 10 + 100\tau^2 - 10 = 100\tau^2$$

$$100\tau^2 = 50 \rightarrow \tau = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Prędkość liczymy jako pochodną drogi po czasie:

$$v = \frac{dx}{dt} = 200t$$

prędkość kątową obliczona może być także z zależności:

$$\omega_2 = \frac{v}{R_2}$$

$$\omega_2 = \frac{200t}{60} = \frac{10t}{3}$$

znając prędkość kątową ω_2 możemy obliczyć prędkość kątową ω_3 , przyspieszenie kątowe ϵ_3 :

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 r_3$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{r_3} = \frac{10t \cdot 45}{3 \cdot 36} = \frac{25}{6}t$$

$$\epsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{25}{6}$$

Znając te wartości policzymy już z łatwością potrzebne wielkości:

$$v_M = \omega_3 r_3 = \frac{25}{6}t * 36 = 150t$$

$$a_{Mt} = \frac{dv_M}{dt} = \epsilon_3 r_3 = \frac{25}{6} * 36 = 150$$

$$a_{Mn} = \frac{v_M^2}{r_3} = \omega_3^2 r_3 = \frac{(150t)^2}{36} = 625t^2$$

$$a = \sqrt{a_{Mt}^2 + a_{Mn}^2}$$

2. K-7 Określanie prędkości i przyspieszenia w ruchu postępowym ciała sztywnego

K7-5 – Znaleźć dla zadanego położenia mechanizmu prędkości i przyspieszenia punktów B i C.

Dane:

$$OA = 25 \text{ [cm]}$$

$$AC = 20 \text{ [cm]}$$

$$\omega_{OA} = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

$$\varepsilon_{OA} = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

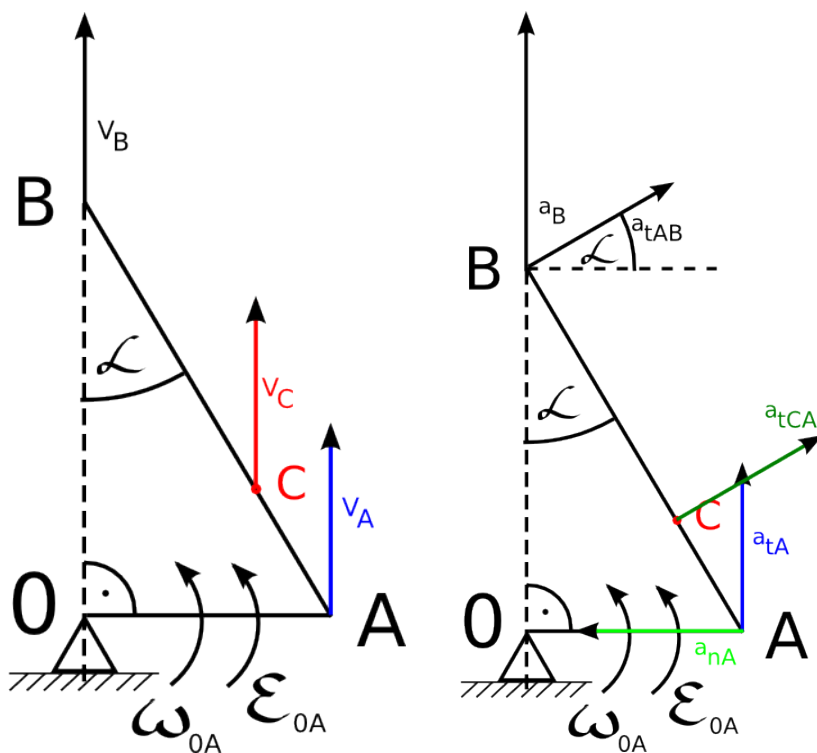
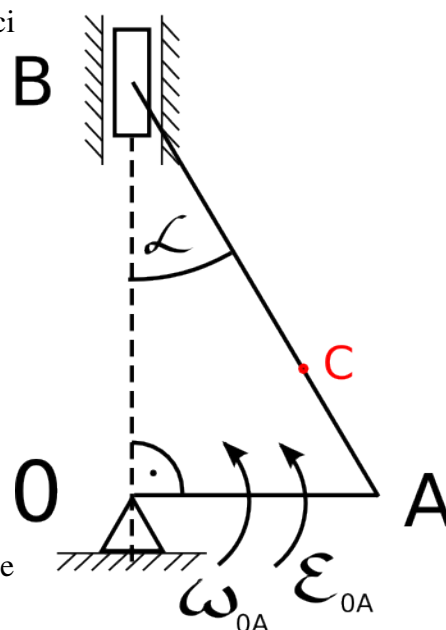
Szukane:

$$v_C, v_B, a_C, a_B$$

Na początku liczymy prędkość liniową punktu A:

$$v_A = \omega_{OA} \overline{OA} = 25 \text{ [cm/s]}$$

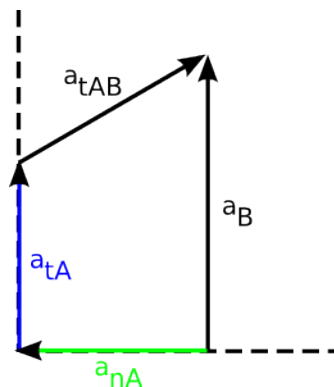
Ponieważ chwilowy środek obrotu dla punktów A i B znajduje się w nieskończoności, więc prędkość ω_{AB} wynosi 0. Dlatego:



$$v_A = v_B = v_C = 25 \text{ [cm/s]}$$

Licząc dalej, przyspieszenie punktu A – jego składowe styczna i normalna:

$$\begin{aligned}
a_{tA} &= \epsilon_{OA} \overline{OA} = 25 \text{ [cm/s}^2\text{]} \\
a_{nA} &= \omega_{OA}^2 \overline{OA} = 25 \text{ [cm/s}^2\text{]} \\
\vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \\
a_{tBA} &= \epsilon_{AB} \overline{AB} \\
a_{nBA} &= \omega_{AB}^2 \overline{AB} = 0, \quad \omega_{AB} = 0
\end{aligned}$$



aby obliczyć wartość przyspieszenia bezwzględnego dokonujemy rzutowania na osie:

$$\begin{aligned}
x: a_{Bx} &= -a_{nA} + a_{tAB} \cos 30^\circ \\
y: a_{By} &= a_{tA} + a_{tBA} \cos 60^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{Bx} &= -\omega_{OA}^2 \overline{OA} + \epsilon_{AB} \overline{AB} \cos 30^\circ \\
a_{By} &= \epsilon_{OA} \overline{OA} + \epsilon_{AB} \overline{AB} \cos 60^\circ
\end{aligned}$$

Podobnie liczymy wartości dla przyspieszenia dla punktu C:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_C &= \vec{a}_A + \vec{a}_{CA} \\
\vec{a}_C &= \vec{a}_{nA} + \vec{a}_{tA} + \vec{a}_{tAC} + \vec{a}_{nAC} \\
a_{tAC} &= \epsilon_{AB} \overline{AC} \\
a_{nAC} &= \omega_{AB}^2 \overline{AC} = 0, \quad \text{bo } \omega_{AB} = 0
\end{aligned}$$

I podobnie, aby policzyć wartość przyspieszenia bezwzględnego dla punktu C, rzutujemy wektory na osie współrzędnych:

$$\begin{aligned}
a_{Cx} &= -a_{nA} + a_{tAC} \cos 30^\circ \\
a_{Cy} &= a_{tA} + a_{tAC} \cos 60^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{Cx} &= -\omega_{OA}^2 \overline{OA} + \epsilon_{AB} \overline{AC} \cos 30^\circ \\
a_{Cy} &= \epsilon_{OA} \overline{OA} + \epsilon_{AB} \overline{AC} \cos 60^\circ
\end{aligned}$$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2}$$

3. K-11 Ruch złożony. Określanie prędkości bezwzględnej i przyspieszenia bezwzględnego w ruchu postępowym unoszenia

K11-25 – Mając zadane równania ruchu względnego punktu M i ruchu postępowego unoszenia ciała D dla czasu $t=t_1$ określić prędkość bezwzględną i przyspieszenie bezwzględne punktu M.

Dane:

$$x_e = 24t^2 + 7t \text{ [cm]}$$

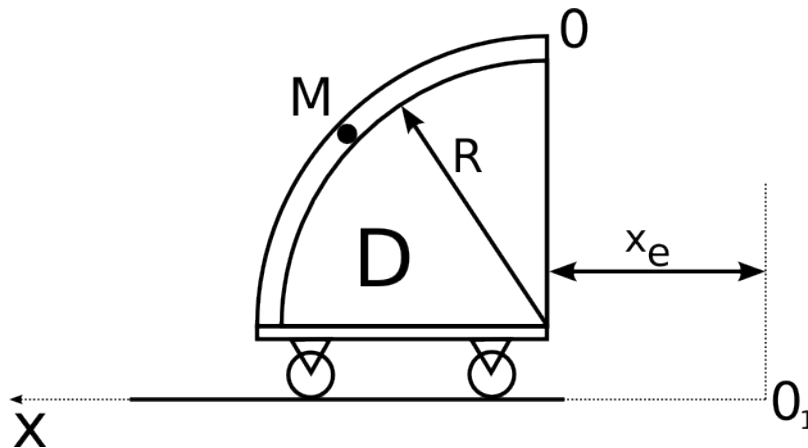
Szukane:

$$a_M$$

$$OM = s_r = \frac{5}{3}\pi t^3 \text{ [cm]} \quad v_M$$

$$t_1 = 2 \text{ [s]}$$

$$R = 40 \text{ [cm]}$$



Ruchem względnym jest ruch punktu po obwodzie ćwierćkoła, ruchem unoszenia ruch całego wózka. Ruch bezwzględny to ruch punktu M względem punktu O_1 .

Prędkością względną będzie pochodna z drogi w ruchu względnym czyli pochodna po czasie z odcinka s_r .

$$v_w = \frac{ds_r}{dt} = \left(\frac{5}{3}\pi t^3\right)' = 5\pi t^2$$

$$v_w(t=2) = 20\pi \text{ [cm/s]}$$

Prędkością unoszenia będzie miała tylko jedną składową – wynikającą z ruchu postępowego x_e .

$$v_u = v_0 = \frac{dx_e}{dt} = 48t + 7$$

$$v_0(t=2) = 96 + 7 = 103$$

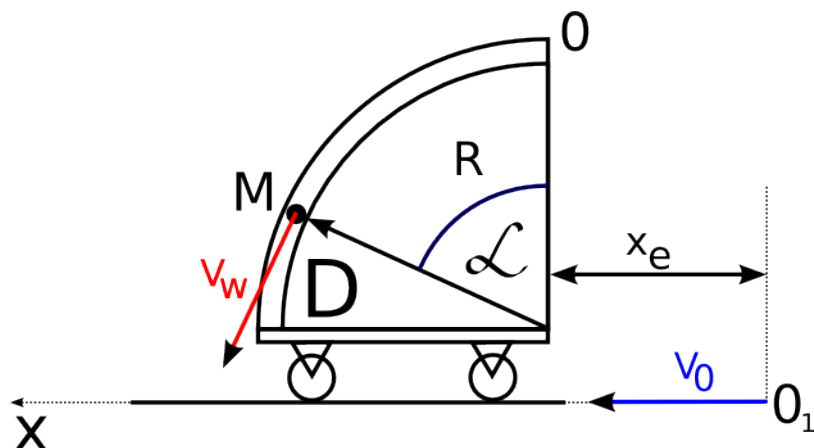
Położenie wektora prędkości względnej względem układu nieruchomego określa kąt α . W danej chwili czasu $t=t_1$ wartość kąta α wynosi:

$$s_r = \frac{5}{3}\pi t^3 = \alpha R$$

$$\text{dla } t=2 \text{ [s]} \quad \alpha R = \frac{40}{3}\pi$$

$$40\alpha = \frac{40}{3}\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$



Wartość bezwzględnej prędkości otrzymamy po zrzutowaniu na osie wektorów prędkości v_0 i v_w .

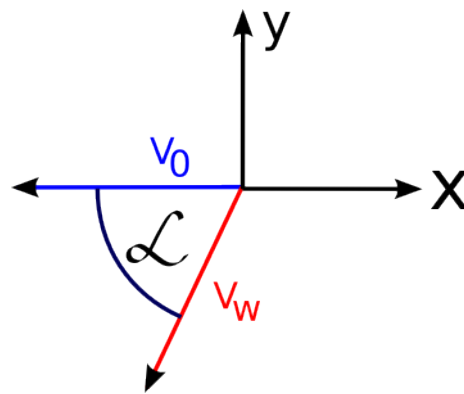
$$v_x = -v_0 - v_w \cos 60^\circ$$

$$v_y = -v_w \sin 60^\circ$$

$$v_x = -103 - 10\pi$$

$$v_y = -20\pi \frac{\sqrt{3}}{2} = -10\sqrt{3}\pi$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$



Wartości przyspieszeń wynoszą odpowiednio:

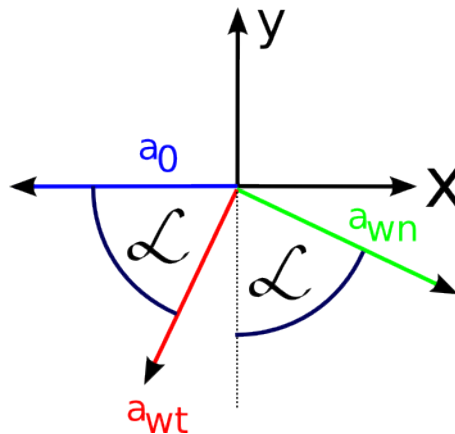
$$a_{wt} = \frac{dv_w}{dt} = \frac{d^2 s_r}{dt^2} = 10\pi t$$

$$a_{wt}(t=2) = 20\pi$$

$$a_{wn} = \frac{v_w^2}{R} = \frac{25\pi^2 t^4}{R}$$

$$a_{wn}(t=2) = 10\pi^2$$

$$a_0 = \frac{dv_0}{dt} = 48$$



Po zrzutowaniu na osie, przyspieszenie bezwzględne wynosi:

$$a_x = -a_0 - a_{wt} \cos 60^\circ + a_{wn} \sin 60^\circ$$

$$a_y = -a_{wt} \sin 60^\circ - a_{wn} \cos 60^\circ$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$